Lineare Abbildungen und Matrizen

Repetition

Lineare Algebra

Lineare Abbildungen und Matrizen

Lineare Abbildungen und Skalarprodukt

Lineare Selbstabbildungen

Koordinatentransformation, Basiswechsel

Satz

Jede lineare Abbildung $\mathcal{F} : V^n \to W^m$ lässt sich durch eine $m \times n$-Matrix darstellen. Dazu wählt man Basen $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ in V und $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_m)$ in W. Seien

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } [y]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

die Koordinatenvektoren von x und $y = \mathcal{F}(x)$ bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\mathcal{C}$. Dann gilt

$$[y]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}$$

Hierbei ist

$$A = ([\mathcal{F}(b_1)]_{\mathcal{C}} \ldots [\mathcal{F}(b_n)]_{\mathcal{C}})$$

D.h. die Spalten von A sind die Koordinatenvektoren von $\mathcal{F}(b_i)$ bezüglich $\mathcal{C}$.

Definition

Die Matrix A im obigen Satz heisst **Darstellungsmatrix** von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$.

Schematisch:

$$\begin{tikzcd} V^n \arrow[r, "\mathcal{F}"] & W^m \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \mathcal{F}(x) \arrow[d, mapsto] \\ {[x]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto, "A"] & \color{red}{[\mathcal{F}(x)]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}}} \end{tikzcd}$$

Beispiel

Sei V der VR der Polynome vom Grad ≤ 2 mit der Basis $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ und W der VR der affin linearen Funktionen mit der Basis $\mathcal{C} = \{1, x\}$. Die Ableitung

$$\mathcal{F} : V \to W, p \mapsto p'$$

ist linear. Es gilt

$$\mathcal{F}(1) = \frac{d}{dx}1 = 0, \mathcal{F}(x) = \frac{d}{dx}x = 1, \mathcal{F}(x^2) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

und somit

$$[\mathcal{F}(1)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, [\mathcal{F}(x)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [\mathcal{F}(x^2)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

D.h. als Darstellungsmatrix ergibt sich

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel (Fortsetzung)

Testen wir dies am Polynom $p(x) = a + bx + cx^2$:

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ und } [p'(x)]_{\mathcal{C}} = [b + 2cx]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} b \\ 2c \end{pmatrix}.$$

In der Tat gilt $[p'(x)]_{\mathcal{C}} = A[p(x)]_{\mathcal{B}}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b \\ 2c \end{pmatrix}}_{[p'(x)]_{\mathcal{C}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{[p(x)]_{\mathcal{B}}}$$

Definition

Sei $\mathcal{F} : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

- $\ker(\mathcal{F}) := \{x \in V : \mathcal{F}(x) = 0\} \subset V$ der **Kern** von $\mathcal{F}$,
- $\operatorname{im}(\mathcal{F}) := \{\mathcal{F}(x) : x \in V\} \subset W$ das **Bild** von $\mathcal{F}$.

Speziell: Ist $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$, $A \in \mathbb{M}^{m \times n}$, so schreibt man

- $\ker(A)$ statt $\ker(\mathcal{F})$,
- $\operatorname{im}(A)$ statt $\operatorname{im}(\mathcal{F})$.

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt

- $b \in \operatorname{im}(A) \iff Ax = b$ ist lösbar.
- $\operatorname{im}(A) = \operatorname{span}\{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$
- $x \in \ker(A) \iff x$ ist Lösung von $Ax = 0$
- $\ker(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$
- $\operatorname{im}(A)$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$
- $\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{im}(A)) = n$
- $\dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(\operatorname{im}(A^\top)) = \operatorname{Rang}(A)$.

Zusammengestetze Abbildungen

Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Basen in V^n, W^m und Z^p.
Sei A die Darstellungsmatrix von $\mathcal{F} : V \to W$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, und B die Darstellungsmatrix von $\mathcal{G} : W \to Z$ bezüglich $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd}
V^n \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{H}=\mathcal{G}\circ\mathcal{F}"] & W^m \arrow[r, "\mathcal{G}"] & Z^p \\
x \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}(x) \arrow[r, mapsto] & \mathcal{G}(\mathcal{F}(x)) = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}(x) \\
{[x]_{\mathcal{B}}} \arrow[r, mapsto] & A[x]_{\mathcal{B}} \arrow[r, mapsto] & BA[x]_{\mathcal{B}}
\end{tikzcd}$$

Wir lesen ab: Die Darstellungsmatrix von $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{D}$ ist BA.

Satz

- Die Zusammensetzung von linearen Abbildungen ist linear.
- Sei $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$, $\mathcal{G} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, y \mapsto By$, dann ist $\mathcal{H} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, x \mapsto BAx$.

Zusammenhang zwischen $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax$ und $\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n, y \mapsto A^\top y$

Satz

- $\operatorname{im}(A)$ und $\ker(A^\top)$ spannen zusammen $\mathbb{R}^m$ auf.
- $\forall z \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m : \langle Az, y\rangle = \langle z, A^\top y\rangle$.
- $\operatorname{im}(A) \perp \ker(A^\top)$.
- $\dim(\operatorname{im}(A)) + \dim(\ker(A^\top)) = m$.

Korollar (Fredholm Alternative)

$Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des **adjungierten** LGS $A^\top y = 0$ steht.

Definition

- $\mathcal{F}: V \to V, x \mapsto \mathcal{F}(x)$ heisst **invertierbar**, falls $\mathcal{F}$ bijektiv ist, d.h. $\forall x' \in V : \exists! x \in V$ mit $\mathcal{F}(x) = x'$.
- Ist $\mathcal{F}$ invertierbar, so heisst $\mathcal{F}^{-1} : V \to V, x' \to x$ (mit $\mathcal{F}(x) = x'$) die **Umkehrabbildung** von $\mathcal{F}$.

Satz

- $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ ist invertierbar $\iff$ A regulär.
- Ist $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$ invertierbar, so ist $\mathcal{F}^{-1}$ linear und $\mathcal{F}^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto A^{-1}x$.
- Ist $\mathcal{F} : V^n \to V^n$ invertierbar, so gilt $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathrm{Id} : V \to V, x \mapsto x$.

Basiswechsel

Satz

Seien $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ und $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ zwei Basen in V^n, und

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$$

die Koordinatenvektoren von $v \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$ respektive $\mathcal{B}'$. Dann gilt

$$[v]_{\mathcal{B}'} = T[v]_{\mathcal{B}} \text{ und } [v]_{\mathcal{B}} = S[v]_{\mathcal{B}'}$$

wobei

$$T = ([b_1]_{\mathcal{B}'} \ldots [b_n]_{\mathcal{B}'}) \text{ resp. } S = ([b'_1]_{\mathcal{B}} \ldots [b'_n]_{\mathcal{B}})$$

Definition

$T = ([b_1]_{\mathcal{B}'} \dots [b_n]_{\mathcal{B}'})$ heisst **Übergangsmatrix** von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

Bemerkung: Die Übergangsmatrix S von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ ist invers zu T.

Beispiel (Übergangsmatrix)

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (b_1, b_2) := (e_1, e_2)$ die Standardbasis und $\mathcal{B}' = (b_1', b_2') := (e_1 + e_2, e_2 - e_1)$. Die Übergangsmatrix S von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ ist somit

$$S = ([b_1']_{\mathcal{B}}\,[b_2']_{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für $v = 2b_1' + b_2'$ erhalten wie somit

$$[v]_{\mathcal{B}} = S[v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$