Lineare Abbildungen und Matrizen

Wie wirkt sich ein Basiswechsel auf die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung $\mathcal{F} : V^n \to V^n$ aus?

Seien $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}$ und $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}$ die Darstellungsmatrizen von $\mathcal{F}$ bezüglich zweier Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$. Weiter sei T die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

$$
\begin{array}{rcl}
[v]_{\mathcal{B}} & \xmapsto{\quad\mathcal{F}\quad} & [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \\
\big\downarrow T & & \big\downarrow T \\
T[v]_{\mathcal{B}} = [v]_{\mathcal{B}'} & \xmapsto{\quad\mathcal{F}\quad} & [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}[v]_{\mathcal{B}'} = T[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}} \\
& & = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'}T[v]_{\mathcal{B}}
\end{array}
$$

Wir lesen ab:

Satz

Mit den Bezeichnungen oben gilt: $[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} = T[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}T^{-1}$

Beispiel (Fortsetzung vom letzten Mal)

Sei $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ die zuvor betrachteten Basen, und
$[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$.
Für die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ hatten wir
$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und somit $T = S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Also

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}'} &= T[\mathcal{F}]_{\mathcal{B}}T^{-1} = \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathcal{B}'$ ist also besonders geeignet um $\mathcal{F}$ zu beschreiben, da die Darstellungsmatrix sehr einfach (diagonal!) ist.

Anwendung

Sei $A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$. Man berechne A^n für $n \in \mathbb{N}$.

Lösung: Wir haben im Beispiel gesehen, dass $A = T^{-1}BT$ mit $B = \mathrm{diag}(2,1)$. Somit

$$\begin{aligned}
A^n &= (T^{-1}BT)^n = \\
&= (T^{-1}BT)(T^{-1}BT)\ldots(T^{-1}BT) = \\
&= T^{-1}B^nT = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n+1 & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 2^n+1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Definition

Die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heissen **ähnlich**, falls eine reguläre Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existiert so dass $PA = BP$.

Korollar

Sei $\mathcal{F} : V^n \to V^n$. Dann sind die Darstellungsmatrizen von $\mathcal{F}$ bezüglich verschiedener Basen ähnlich.

Korollar

Die Übergangsmatrix $([b_1]_{\mathcal{B}'} \ldots [b_n]_{\mathcal{B}'})$ von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist die Darstellungsmatrix der Identität $\mathrm{Id} : V_{\mathcal{B}} \to V_{\mathcal{B}'}, v \mapsto v$. Dabei bezeichnet $V_{\mathcal{B}}$ den Vektorraum V, ausgerüstet mit der Basis $\mathcal{B}$, und entsprechend $V_{\mathcal{B}'}$ den Vektorraum V, ausgerüstet mit der Basis $\mathcal{B}'$.

Fehlerkorrigierende Codes

Sendet man ein **Wort**, d.h. eine 0-1-Sequenz der Länge n, so können Übertragungsfehler passieren:

$$010011 \to 010111$$

Frage: Ist es möglich, solche Übertragungsfehler auf Empfängerseite zu **erkennen** und zu **korrigieren**?

Idee: Verwende Worte eines geeigneten Wörterbuches:

Ostern → Ogtern ??? ⇝ Ostern !!!

Dabei sollte des Wörterbuch keine Wörter enthalten, die andern Wörtern sehr ähnlich sind: So könnte das empfangene Wort **Yaus** ursprünglich **Maus**, **Haus** oder **Laus** gewesen sein.

Konstruktion eines solchen Wörterbuchs: Hamming-Code

Vorbemerkung: Alle Rechnungen werden modulo 2 ausgeführt.

1. Sei $r \in \mathbb{N}$. Schreibe alle 0-1-Sequenzen $\neq 0$ der Länge r als Spalten in eine Matrix $H_r \in \mathbb{R}^{r \times n}$ mit $n = 2^r - 1$. Z.B. für $r = 3$:

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Berechne

$$\mathrm{Ham}(r) := \left\{ c = (c_1 \dots c_n) : c_i \in \{0,1\}, cH_r^\top = 0 \right\}$$

Beachte

$$cH_r^\top = 0 \iff H_r c^\top = 0 \iff c^\top \in \ker H_r$$

Für $r = 3$:

$$(c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \ c_5 \ c_6 \ c_7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} (0 \ 0 \ 0)$$

Da Rang $H_3 = 3$, können wir c_1, c_2, c_3, c_4 als freie Parameter wählen, und c_5, c_6, c_7 daraus berechnen. Dies ergibt die folgende Liste mit $2^4 = 16$ Lösungen:

$$\text{Ham}(3): \quad \begin{array}{ccccccc} 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&1\\ 0&1&0&0&1&0&1\\ 0&1&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&1&1&1&0&0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 1&0&0&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&1\\ 1&0&1&1&0&1&0\\ 1&1&0&0&1&1&0\\ 1&1&0&1&0&0&1\\ 1&1&1&0&0&0&0\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{array}$$

Wir halten fest:

(a) Hat ein Vektor c nur an der i-ten Stelle eine 1 und sonst lauter 0, so ist $cH_r^\top$ gerade die i-te Zeile von $H_r^\top$, also nicht der Nullvektor.
Somit ist es nicht möglich, dass ein Element von Ham(3) genau eine 1 enthält.

(b) Hat ein Vektor c nur an der i-ten und der j-ten Stelle eine 1 und sonst lauter 0, so ist $cH_r^\top$ gerade die Summe der i-ten und der j-ten Zeile von $H_r^\top$, also nicht der Nullvektor (Beachte: modulo 2 ist $a + b = 0 \iff a = b$).
Somit ist es nicht möglich, dass ein Element von Ham(3) genau zwei 1 enthält.

(c) Da $\ker H_r$ ein Vektorraum ist, ist die Differenz $h_i - h_j \neq 0$ von zwei verschiedenen Elementen von Ham(3) wieder ein Element von Ham(3). Somit unterschieden sich wegen (a) und (b) zwei Elemente von Ham(3) an mindestens 3 Stellen.

Fazit: Wird bei der Übertragung eines Wortes $h_i \in \text{Ham}(3)$ ein Bit falsch übertragen, $h_i \to \tilde{h}_i$, so kann der Empfänger

- dies **erkennen**, da $\tilde{h}_i \notin \text{Ham}(3)$
- **schliessen**, dass h_i das eigentlich gesendete Wort war, denn alle andern Wörter in Ham(3) unterscheiden sich in midestens 2 Bits von $\tilde{h}_i$.

Definition

Ein Code mit den oben beschriebenen Eigenschaften heisst **1-fehlerkorrigierend**.

Ein 6er im Lotto

Ham(3) ist gleichzeitig ein sicheres Lotto-Tipp-System: Wer die 16 Tipps aus Ham(3) als Wettscheine abgibt, hat bei der nächsten Ziehung $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ einen sicheren 6er!

Eigenwertprobleme

Definition

$\lambda \in \mathbb{C}$ ist ein **Eigenwert** von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zum **Eigenvektor** $x \neq 0$

$$\Updownarrow$$

$$Ax = \lambda x \quad (x \neq 0)$$

$$\Updownarrow$$

λ ist Nullstelle des **charakteristischen Polynoms** $\det(A - \lambda \mathbb{I})$ und $0 \neq x \in \ker(A - \lambda \mathbb{I}) =:$ **Eigenraum** E_λ.

Die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwerts λ ist dessen Vielfachheit als Nulstelle des charakteristischen Polynoms.

Die **geometrische Vielfachheit** eines Eigenwerts λ ist die Dimension des Eigenraums E_λ.

Satz

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschiedene EW von A und $x_1, \ldots, x_k$ dazu gehörige EV. Dann sind $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.