Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2015 – Woche 03

Marcel Dettling

Institute für Datenanalyse und Prozessdesign

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

marcel.dettling@zhaw.ch

http://stat.ethz.ch/~dettling

ETH Zürich, 4. März, 2015

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2015 – Woche 03

Lineare Gleichungssysteme

- zur Suche nach Unbekannten unter formulierten Bedingungen
- es gibt entweder genau eine, unendlich viele oder keine Lösung

Gauss-Algorithmus

- dient zum Umformen von linearen Gleichungssystemen
- Ziel: Dreiecks-Form, Lösung leicht ablesbar
- es gibt 2 erlaubte Umformungs-Operationen:

  a) Vertauschen von Zeilen

  b) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen
- die Lösung wird danach durch Rückwärtseinsetzen bestimmt

Zeilenstufenform

$$
\begin{array}{cccccccccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & & & & & \cdots & & x_n & 1 \\
\hline
\circledast & * & \cdots & & & & & \cdots & & * & c_1 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \circledast & * & & \cdots & & * & c_2 \\
\vdots & & & & & \ddots & & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \cdots & & & 0 & \circledast & * & \cdots & * & c_r \\
\hline
0 & & \cdots & & & & 0 & & \cdots & 0 & c_{r+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & & \cdots & & & & 0 & & \cdots & 0 & c_m
\end{array}
$$

Rang: # Nicht-Nullzeilen = # Pivots im Endschema

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2015 – Woche 03

Anzahl Lösungen eines LGS

- Der Rang bestimmt die Anzahl Lösungen
-

Dimension	# Lösungen	r=m	r=n	r<m	r<n
m=n	0,1,∞	1		0,∞	
m<n	0,∞	∞	-	0,∞	-
m>n	0,1,∞	-	0,1	-	0,∞

- Die geometrische Interpretation von Spaltenvektoren im Raum, welche kombiniert werden müssen, um die rechte Seite zu erzeugen, ist stets sehr hilfreich.
- Es gibt spezielle LGS, wo die rechte Seite trivial ist (alles 0). Sie heissen homogene Systeme und haben stets eine Lösung.

Grundlagen der Mathematik II
Lineare Algebra und Statistik
FS 2015 – Woche 03

Definition von speziellen Matrizen

DEFINITIONEN:

i) Eine $m \times n$-Matrix heisst *Nullmatrix*, falls jedes Element gleich null ist. Jede Nullmatrix wird mit 0 bezeichnet.

BEISPIEL: Die Matrix

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die 2×3-Nullmatrix.

ii) Eine quadratische Matrix R heisst *obere Dreiecksmatrix* oder *Rechtsdreiecksmatrix*, falls $(R)_{ij} = 0$ für $i > j$.

BEISPIEL:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definition von speziellen Matrizen

Eine quadratische Matrix L heisst *untere Dreiecksmatrix* oder *Linksdreiecksmatrix*, falls $(L)_{ij} = 0$ für $i < j$.

BEISPIEL:

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

iii) Eine $n \times n$-Matrix D heisst *Diagonalmatrix*, falls $(D)_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Die Elemente $(D)_{ii} = d_{ii}$ heissen *Diagonalelemente*. Für die Diagonalmatrix mit gegebenen Diagonalelementen $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ schreiben wir $D = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn})$.

BEISPIEL:

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(5, 2, 3).$$

Definition von speziellen Matrizen

iv) Die $n \times n$-Matrix $I_n = \text{diag}(1, 1, \ldots, 1)$ heisst *Einheitsmatrix* oder *Identität*.

BEISPIEL:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

v) Eine weitere häufig auftretende Klasse von Matrizen sind 1-spaltige oder $n \times 1$-Matrizen. Diese $n \times 1$-Matrizen werden *Spaltenvektoren* genannt. Wir bezeichnen Spaltenvektoren mit Kleinbuchstaben. Die Elemente eines Spaltenvektors heissen *Komponenten*. Die Komponenten eines Spaltenvektors werden nur mit dem Zeilenindex indiziert.

BEISPIEL: Die 4×1-Matrix $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein Spaltenvektor.

Es gilt $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ mit $b_1 = 2,\ b_2 = -4,\ b_3 = 7,\ b_4 = 0.$ ¶