1 (a) $\underline{\underline{T_{2\vec{v}}}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} : B \longmapsto H$; $\underline{\underline{S_g}} : H \longmapsto D$; $\underline{\underline{R_{E,120°}}} : D \longmapsto C$

(b) $R_{D,120°} = R_{D,-240°}$, $R_{B,-120°} = R_{B,240°}$, $R_{F,60°} = R_{F,-300°}$

(c) $T: C \xmapsto[R_{B,120°}]{} D \xmapsto[R_{D,120°}]{} D \xmapsto[R_{E,120°}]{} C$, T ist gleichsinnig (da Hintereinanderausführung von 3 Rotationen ⇝ keine Spiegelung

$T: E \longmapsto A \longmapsto E \longmapsto E$ T hat 2 Fixpunkte ⇝ keine Rotation mit $0 < \alpha < 360°$

Nach Satz 2.9 ist T die <u>Identität</u> : $T = I$

2

(a) $\mathrm{Symm}(\Omega_1) = \{I, R_{z,90°}, R_{z,180°}, R_{z,270°}\}$

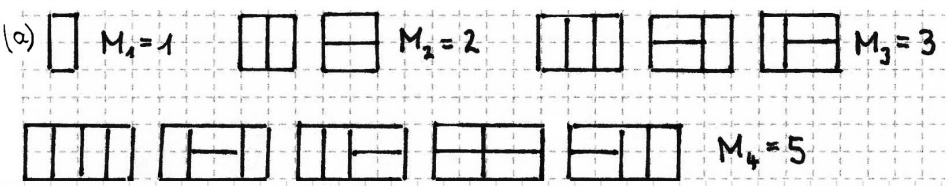
$\mathrm{Symm}(\Omega_2) = \{I, R_{z,90°}, R_{z,180°}, R_{z,270°}, S_a, S_b, S_c, S_d\}$

(b)

$\circ$	I	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$
I	I	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$
$R_{z,90°}$	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$	I
$R_{z,180°}$	$R_{z,180°}$	$R_{z,270°}$	I	$R_{z,90°}$
$R_{z,270°}$	$R_{z,270°}$	I	$R_{z,90°}$	$R_{z,180°}$

---

3 (a)



(b) $M_{n+2} = M_{n+1} + M_n$ denn bei jedem Muster von M_{n+1} kann $\square$ rechts angefügt werden: $\boxed{M_{n+1}}\square$

" " " " " M_n kann $\square\square$ " " " : $\boxed{M_n}\square\square$

Die Anfügung $\square\square$ ist bereits bei M_{n+1} enthalten, sonst hätte vorher ein Muster gefehlt, andere sind nicht möglich bzw. bei früheren enthalten.

(c) $\dfrac{M_n}{M_{n-1}} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n} \xrightarrow{n \to \infty} \phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen f_n, f_{n+1} strebt gegen das Verhältnis des Goldenen Schnitts

---

4 $\mathbb{R}^-$ keine Gruppe, denn $s,t \in \mathbb{R}^-$: $s \cdot t > 0$, z.B. $(-1)\cdot(-2) = 2$
(G1) nicht erfüllt

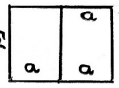
$\mathbb{G}$ keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{G}$: $e \cdot t = t \cdot e = t$ ⇝ $e = 1$ ungerade, d.h. $\notin \mathbb{G}$
(G3) nicht erfüllt

$\mathbb{N}$ keine Gruppe, denn $t \in \mathbb{N}$: $t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot t = 1$ (Neutralelement) ⇝ $t^{-1} = \frac{1}{t} \notin \mathbb{N}$
(G4) nicht erfüllt z.B. $t = 2$, $t^{-1} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{R}^+$ unendliche, kommutative Gruppe : (G1) Für beliebige $s,t \in \mathbb{R}^+$ gilt stets $s \cdot t \in \mathbb{R}^+$
(G2) Für beliebige $r,s,t \in \mathbb{R}^+$ gilt stets : $(r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t)$ (G3) $1 \in \mathbb{R}^+$ und $t \cdot 1 = 1 \cdot t = t$, alle $t \in \mathbb{R}^+$
(G4) zu $t \in \mathbb{R}^+$ gibt es $\frac{1}{t} =: t^{-1} \in \mathbb{R}^+$ mit $t \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{t} \cdot t = 1$ (KG) Für $s,t \in \mathbb{R}^+$ gilt $s \cdot t = t \cdot s$

5

$\ell_1 = \sqrt{a^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$



$\ell_2 = a$

$\ell_3 = \frac{1}{2}\ell_1$, $\ell_4 = \frac{1}{2}\ell_2$

$\ell_5 = \frac{1}{2}\ell_3$, $\ell_6 = \frac{1}{2}\ell_4$

Jedes nachfolgende Paar ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden Paars mit $\lambda = \frac{1}{2}$

(a) $L = (\ell_1 + \ell_2) + (\ell_3 + \ell_4) + (\ell_5 + \ell_6) + \ldots$

$= (\ell_1 + \ell_2) + \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) + \frac{1}{2}(\ell_3 + \ell_4) + \ldots$

$L = \sqrt{3}a + a + \frac{1}{2}\underbrace{[\ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4 + \ldots]}_{L} \quad \| -\frac{1}{2}L$

$\frac{1}{2}L = a(\sqrt{3}+1)$

$\underline{\underline{L = 2a(\sqrt{3}+1)}}$

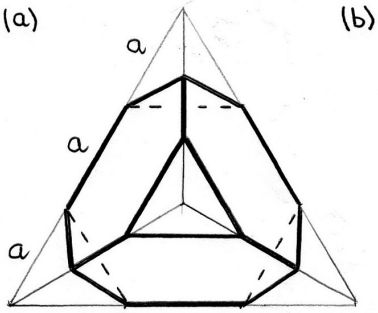
(b) $x = 2\ell_2 - 2\ell_4 + 2\ell_6 - \ldots = 2a - [\underbrace{2\ell_4}_{\frac{1}{2}\ell_2} - \underbrace{2\ell_6}_{\frac{1}{2}\ell_4} + \ldots]$

$= 2a - \frac{1}{2}\underbrace{[2\ell_2 - 2\ell_4 + \ldots]}_{x} \quad \| +\frac{1}{2}x$

$\frac{3}{2}x = 2a$, $\underline{\underline{x = \frac{4}{3}a}}$

---

6 (a)



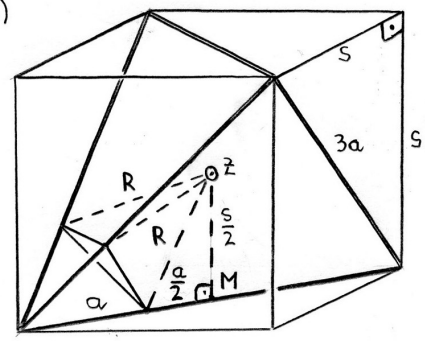
("Strecken" werden gedrittelt)

(b) Grosses Tetraeder: (Skript S.61) $V_G = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\tilde{a}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{a}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tilde{a} = \frac{\sqrt{2}}{12}\tilde{a}^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}27a^3$

Abgeschnittene Ecke: $V_E = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

Volumen Stumpf: $V = V_G - 4V_E = 27\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 - 4\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 = \underline{\underline{\frac{23\sqrt{2}}{12}a^3}}$

(c)



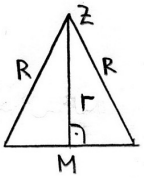
Der Umkugelmittelpunkt Z liegt aus Symmetriegründen im Würfelmittelpunkt. Der Würfel hat Kantenlänge s:

$s^2 + s^2 = (3a)^2 \leftrightarrow 2s^2 = 9a^2 \leftrightarrow s = \sqrt{\frac{9}{2}}a$

Im ◺ Dreieck: $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4}\frac{9a^2}{2} = \frac{4a^2 + 18a^2}{16}$

$\underline{\underline{R = \frac{\sqrt{22}}{4}a}}$

(d) Ja. Jede Verbindung vom Zentrum Z mit einer Kantenmitte führt zu folgendem Dreieck



$r = \frac{s}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9}{2}}a = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\cdot 9}{4}}a = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\,3}{4}a}}$

(e) Ein reguläres Tetraeder