ETHZ D-ARCH
Studiengang
Architektur

Basisprüfung

Mathematisches Denken I & II

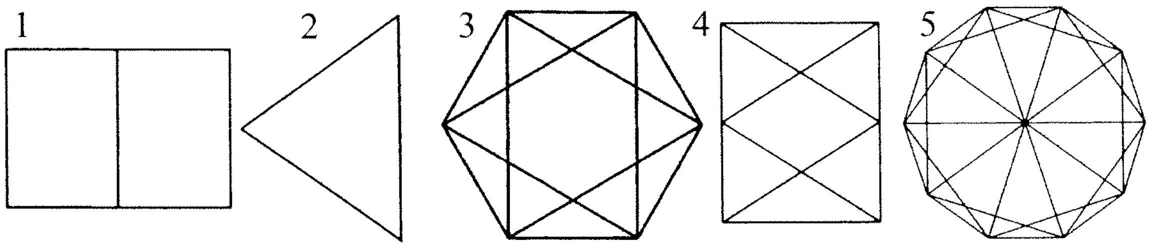
Herbst 2007
Dozent
Dr. M. Leupp

Notieren Sie beim Lösen alle wichtigen Teilschritte, achten Sie auf eine saubere Darstellung. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. **Viel Erfolg!**

Erlaubte Hilfsmittel: Skript mit Notizen, Übungsserien, alte Prüfungen, elementarer Taschenrechner Zeit: 3 Std.

Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht allzu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben lösen.

1. [20P.] **Kurzaufgaben:** (jede Teilaufgabe gibt gleich viele Punkte)



Figur 1 (Aufgabe 1a)

(a) Ordnen Sie die Abbildungen $1, \ldots, 5$ in Figur 1 ihrer jeweiligen **Symmetriegruppe** $\mathbb{D}_1, \ldots, \mathbb{C}_1, \ldots$ zu. Fassen Sie anschliessend die fünf Abbildungen als besondere Ansichten von Drahtmodellen **Platonischer Körper** auf. Um welchen regulären Körper handelt es sich jeweils?

(b) Verbindet man alle Punkte eines ebenen n-Ecks mit den entsprechenden Punkten eines (räumlich) parallel verschobenen, kongruenten n-Ecks, entsteht ein n-seitiges **Prisma**. (b1) Wie viele Ecken, Kanten, Flächen (ausgedrückt durch n) hat ein solches Prisma? Verifizieren Sie die Eulersche Polyederformel! (b2) Skizzieren Sie ein Prisma, das kombinatorisch regulär aber nicht regulär ist und ein Prisma, das nicht konvex ist.

(c) Die sechs Kantenmitten eines regulären **Tetraeders** bilden die Ecken eines regulären Oktaeders. Skizzieren Sie Tetraeder und Oktaeder. (c1) In welchem Verhältnis steht das Oktaedervolumen zum Tetraedervolumen? (c2) In welchem Verhältnis stehen die beiden Oberflächeninhalte?

(d) Durch die folgende Parameterdarstellung wird eine **Fläche** S beschrieben

$$S: \ (\varphi, t) \longmapsto \vec{r} := \begin{pmatrix} (2-t)\cos\varphi \\ (1+t)\sin\varphi \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \leq \varphi < 2\pi \,,\, 0 \leq t \leq 1)$$

(d1) Skizzieren Sie in einem räumlichen Koordinatensystem die Fläche S durch ein angedeutetes Netz von φ- und t-Linien. Was für Kurven sind die φ- bzw. t-Linien? (d2) Ist S eine Regelfläche? (Kurze Begründung ohne Rechnung)

2. [10P.] Bezeichne Ω eine allgemeine **gerade, quadratische Pyramide**. (D.h. die Spitze S der Pyramide liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der quadratischen Grundfläche $ABCD$.)

(a) Ermitteln Sie Symm(Ω), d.h. zählen Sie alle Rotationen (zugehörige Drehwinkel und Drehachsen angeben) und alle Ebenenspiegelungen (zugehörige Ebenen angeben) auf, die die Pyramide Ω mit sich selbst zur Deckung bringen. (Tipp: Analogie zur ebenen Figur $ABCD$ beachten!)

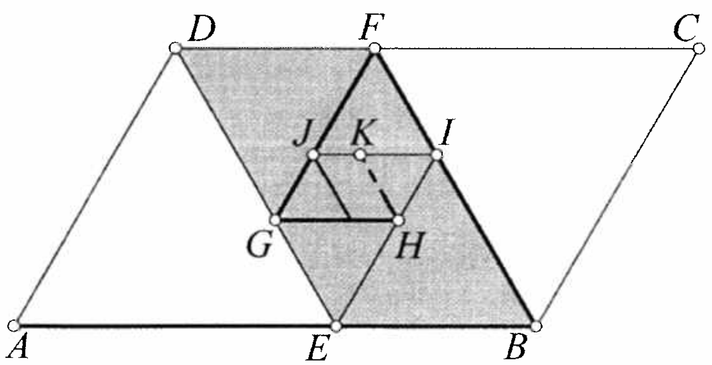
(b) Stellen Sie die zu Symm(Ω) zugehörige Gruppentafel auf bzw. zur Vereinfachung nur den linken unteren Teil der Tafel bis und mit der Diagonalen.

(c) Die Pyramide Ω werde durch ihr an der Grundfläche $ABCD$ gespiegeltes Bild zur Doppelpyramide ergänzt und mit $\tilde{\Omega}$ bezeichnet. Welche Elemente (genaue Beschreibung angeben) umfasst Symm($\tilde{\Omega}$) zusätzlich zu Symm(Ω)?

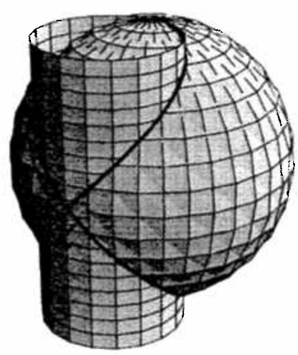
3. [8P.] Von einem **Parallelogramm** $ABCD$ mit Seitenlängen $a = |AB|$, $b = |BC|$ werden 2 gleichseitige Dreiecke weggeschnitten (Figur 2). Es entsteht wiederum ein Parallelogramm.
(a) In welchem Verhältnis müssen a, b zueinander stehen, dass das entstehende markierte Parallelogramm eine massstäbliche Verkleinerung des Parallelogramms $ABCD$ ist? (Setzen Sie zur Vereinfachung $b := 1$)
Durch Fortsetzen des Verfahrens entsteht eine unendliche Folge von Parallelogrammen und, wenn in jedem Parallelogramm die passende Längsseite betrachtet wird, eine Art eckige '**Spirale**' $ABFGHK\ldots$ (Figur 2).
(b) Beschreiben Sie die Lage des Zentrums der 'Spirale' und begründen Sie Ihre Antwort.
(c) Berechnen Sie die Länge der 'Spirale' (ausgedrückt durch a) durch Ausnutzen der 'Selbstähnlichkeit'. (Die Endlichkeit der Länge sei vorausgesetzt.)

4. [10P.] Von einem **Würfel** mit der Kantenlänge a wird eine **Ecke abgeschnitten**, so dass die Schnittfläche die Inkugel des Würfels berührt und drei gleich lange Seiten aufweist.
(a) Skizzieren Sie den Würfel (mit Inkugel) und darin die abgeschnittene Eckpyramide. Skizzieren Sie ferner den 'Querschnitt' dieser Figur, der entsteht, wenn diese Figur mit der Ebene durch die Diagonalfläche des Würfels geschnitten wird, die den Inkugelmittelpunkt und die Spitze der Eckpyramide enthält.
(b) Wie gross ist das Verhältnis zwischen der Pyramidenhöhe h und einer Pyramidenseitenkante s, die auf einer Würfelkante liegt?
(c) Berechnen Sie das Volumen V und die Oberfläche O der abgeschnittenen Eckpyramide ausgedrückt durch die Pyramidenhöhe h.

5. [12P.] Figur 3 zeigt die **Viviani-Kurve** benannt nach ihrem Entdecker VINCENZO VIVIANI (1622-1703). Sie ist gegeben durch $\gamma: \ [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \ t \longmapsto \vec{r}(t) := \begin{pmatrix} \cos^2 t \\ \sin t \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$
(a) 'Erraten' Sie die t-Werte und den Punkt Z, in dem sich die Kurve selbst durchdringt.
(b) Zeigen Sie, dass ein allgemeiner Kurvenpunkt $\vec{r}(t)$ vom Koordinatenursprung den Abstand 1 hat. (D.h. der Kurvenpunkt liegt auf der abgebildeten Einheitskugel K!)
(c) Zeigen Sie, dass der Grundriss eines allgemeinen Kurvenpunkts vom Punkt $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ den Abstand $\frac{1}{2}$ hat. (D.h. der Kurvenpunkt liegt auf dem abgebildeten Zylinder mit Radius $\frac{1}{2}$.)
(d) Skizzieren Sie sorgfältig Grundriss γ' und Seitenriss $\tilde{\gamma}$ (Projektion auf die (x, z)-Ebene) der Kurve γ. (Umriss der Einheitskugel K und jeweilige Koordinatenachsen als Orientierungshilfe eintragen)
Um was für eine Kurve handelt es sich bei $\tilde{\gamma}$? (Rechnerische Begründung)
(e) Zeigen Sie, dass die Kurve γ sich im Punkt Z rechtwinklig durchdringt.



Figur 2 (Aufgabe 3)

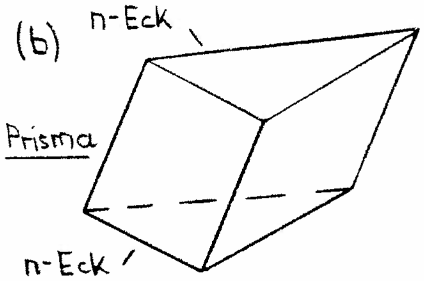

Figur 3 (Aufgabe 5)

① (a) $\underline{1}$: $\mathbb{D}_2$, Würfel $\underline{2}$: $\mathbb{D}_1$, Tetraeder $\underline{3}$: $\mathbb{D}_6$, Oktaeder
(Δ kann nicht gleichseitig sein!)

$\underline{4}$: $\mathbb{D}_2$, Oktaeder $\underline{5}$: $\mathbb{D}_{10}$, Ikosaeder

---

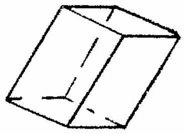
(b)



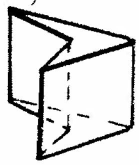
$e = n+n = \underline{\underline{2n}}$, $k = n+n+n = \underline{\underline{3n}}$, $f = 1+n+1 = \underline{\underline{n+2}}$
(Anzahl Ecken) (Anzahl Kanten) (Anzahl Flächen)

Eulersche Formel: $e-k+f = 2n-3n+n+2 = \underline{\underline{2}}$ (stimmt)

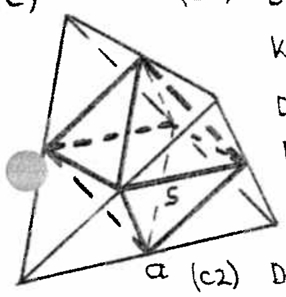
kombinatorisch regulär
⇝ lauter Vierecke
(kein Würfel)



nicht konvex
⇝ nicht konvexes
n-Eck



(c)

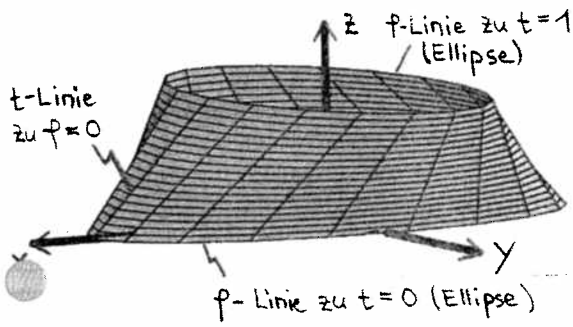


(c1) Die Seitenkante s des Oktaeders ist eine massstäbliche Verkleinerung der Seitenkante a des Tetraeders: Längenfaktor $\lambda = \frac{1}{2}$

Das Oktaeder entsteht durch Abschneiden von 4 Eckpyramiden (Tetraeder).
Diese Eckpyramiden sind massstäbliche Verkleinerungen des ursprüngl. Tetraeders mit Volumenfaktor: $\lambda^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. $V_{Okt} = V_{Tet} - 4\cdot\left(\frac{1}{8}V_{Tet}\right) = \frac{1}{2}V_{Tet} \rightsquigarrow \frac{V_{Okt}}{V_{Tet}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(c2) Das Oktaederseitendreieck ist eine massstäbl. Verkleinerung des Tetraederseitendreiecks mit Flächenfaktor: $\lambda^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. $F_{Okt} = \underbrace{8}_{8\text{ Seitenflächen}}\cdot F_{\Delta Okt} = 8\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{4}F_{\Delta Tet}}_{\frac{1}{4}\cdot F_{Tet}\ (4\text{ Seitenfl.})}\right) = \frac{8}{16}F_{Tet} \rightsquigarrow \frac{F_{Okt}}{F_{Tet}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(d)



φ-Linien: (horizontale) Ellipsen mit Mittelpunkt auf der z-Achse

$$\begin{pmatrix}(2-t)\cos\varphi\\(1+t)\sin\varphi\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\cos\varphi\\b\sin\varphi\\z\end{pmatrix}$$ mit $\left.\begin{matrix}a = 2-t\\b = 1+t\end{matrix}\right\}$ Längen der Halbachsen, $z = t$ (Höhe)

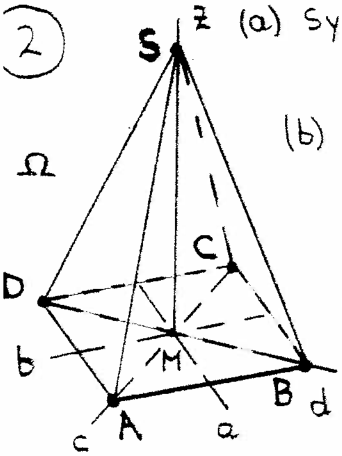
t-Linien: Geradenstücke

$$\begin{pmatrix}2\cos\varphi - t\cos\varphi\\\sin\varphi + t\sin\varphi\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cos\varphi\\\sin\varphi\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\cos\varphi\\\sin\varphi\\1\end{pmatrix}$$ Parameterdrst einer Geraden

S entsteht durch Bewegung einer Geraden im Raum ⇝ Schar gerader Linien: Regelfläche

---

②



z.B. $S_a \circ R_{90} = S_c$

$A \xmapsto{R} B \xmapsto{S} A$

(a) Symm(Ω): $\underbrace{I}$, $\underbrace{R_{90°}, R_{180°}, R_{270°}}_{\text{Rotationen um z-Achse}}$, $\underbrace{S_a, S_b, S_c, S_d}_{\text{Ebenenspiegelungen}}$ an senkrecht-Ebenen durch a bzw. b, c, d

(b)

∘	I	R_{90}	R_{180}	R_{270}	S_a	S_b	S_c	S_d
I	I							
R_{90}	R_{90}	R_{180}						
R_{180}	R_{180}	R_{270}	I					
R_{270}	R_{270}	I	R_{90}	R_{180}				
S_a	S_a	$\mathbf{S_c}$	S_b	S_d	I			
S_b	S_b	S_d	S_a	S_c	R_{180}	I		
S_c	S_c	S_b	S_d	S_a	R_{270}	R_{90}	I	
S_d	S_d	S_a	S_c	S_b	R_{90}	R_{270}	R_{180}	I

(c) Drehspiegelungen

(Verkettung einer Rotation R_{90}, R_{180}, R_{270} mit der Ebenenspiegelung an der Ebene ABCD:

$S_{ABCD} \circ R_{90}$
$S_{ABCD} \circ R_{180}$ (Punktspieg. an M)
$S_{ABCD} \circ R_{270}$)

Rotationen um Achsen a, b, c, d um 180°
⇝ 8 weitere Abbildungen

(3) (a) Sei λ der Verkleinerungsfaktor: $\dfrac{|DE|}{|AB|} = \lambda = \dfrac{|EB|}{|BC|} \leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{a-b}{b}$ (mit $|DE| = b$, $|AB| = a$, $|EB| = a-b$, $|BC| = b$)

$b^2 = a^2 - ab$, $a^2 - ab - b^2 = 0$

mit $b = 1$: $a^2 - a - 1 = 0 \rightsquigarrow a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \;\lightning\right)$ $\dfrac{a}{b} = \underline{\underline{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} = \phi$ Verhältnis des gold. Schnitts

(b) Das Zentrum der Spirale ist der Diagonalenschnittpunkt Z von AC und BD.
Begründung: Die Diagonalen AC und BD des Ausgangsparallelogramms schneiden sich in Z. Z halbiert AC und BD und ist auch Schnittpunkt der Mittelparallelen. $\rightsquigarrow$ Die Diagonalen des nächstfolgenden Parallelogramms schneiden sich wiederum in Z! usw. Im Grenzfall fallen die Parallelogramme in einem Punkt zusammen, also in Z.

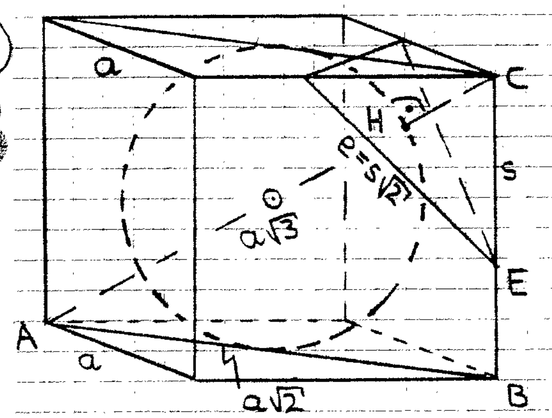
(c) Jedes nachfolgende Parallelogramm ist eine massstäbl. Verkleinerung des vorhergehenden mit Faktor $\lambda = \frac{1}{\phi}$

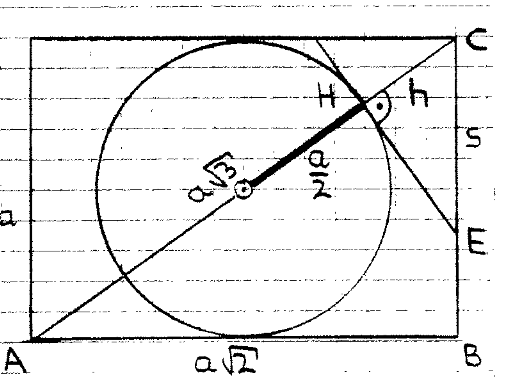
Länge: $L = |AB| + |BF| + |FG| + |GH| + \ldots = a + \frac{1}{\phi}|AB| + \frac{1}{\phi}|BF| + \frac{1}{\phi}|FG| + \ldots = a + \frac{1}{\phi}\underbrace{\left(|AB| + |BF| + |FG| + \ldots\right)}_{=L}$

$$L = a + \frac{1}{\phi}L \leftrightarrow L - \frac{1}{\phi}L = a \rightsquigarrow L = \underline{\underline{\frac{a}{1-1/\phi}}} = \frac{a\cdot\phi}{\phi-1} = \frac{\sqrt{5}+3}{2}a$$

---

(4) (a)





(b) ΔECH ist eine massstäbl. Verkleinerung vom ΔCAB:

$\dfrac{|EC|}{|AC|} = \dfrac{|HC|}{|BC|}$ (mit $|EC| = s$, $|AC| = a\sqrt{3}$, $|HC| = h$, $|BC| = a$)

$\rightsquigarrow s = a\sqrt{3}\,\dfrac{h}{a} = \sqrt{3}\cdot h$

$\dfrac{s}{h} = \underline{\underline{\sqrt{3}}}$

(c) Volumen V: "Grundfläche" $= \frac{1}{2}s\cdot s$, "Höhe" $= s \rightsquigarrow V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}s^2\cdot s = \frac{1}{6}s^3 = \frac{1}{6}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{3}\,h^3 = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}h^3}}$

Oberfläche O: $O = \underbrace{\text{Schnittfläche}}_{\text{(gleichseitiges }\Delta\text{ mit Seite } e = s\sqrt{2})} + 3\text{ Seitenflächen} = \frac{\sqrt{3}}{4}(s\sqrt{2})^2 + 3\cdot\frac{1}{2}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2 + \frac{3}{2}s^2 = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}h^2 + \frac{9}{2}h^2}}$

---

(5) (a) Vermutung $\underline{\underline{Z = (1,0,0)}}$: $\underline{\underline{t=0}} \rightsquigarrow \vec{r}(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\underline{\underline{t=\pi}} \rightsquigarrow \vec{r}(\pi) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ✓

(b) Abstand von (0,0,0):

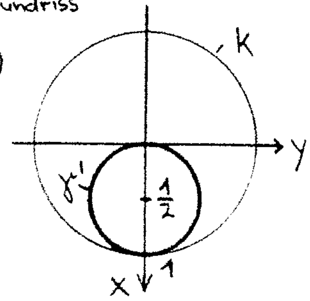
$$\left|\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\cos^4 t + \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\cos^2 t + \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}} = \sqrt{\cos^4 t + \cos^2 t - \cos^4 t + 1 - \cos^2 t} = \underline{\underline{1}}$$

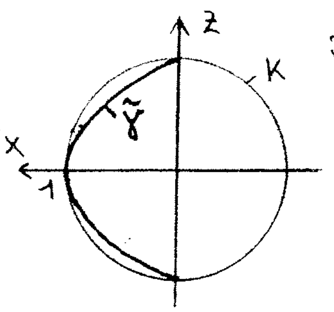
(c) Abstand von $(\frac{1}{2},0,0)$:

$$\left|\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos t\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\cos^2 t - 1/2\\ \sin t\cos t\\ 0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\cos^4 t - \cos^2 t + \frac{1}{4} + \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\cos^2 t} = \sqrt{\cos^4 t - \cos^2 t + \frac{1}{4} + \cos^2 t - \cos^4 t} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Grundriss

(d)





$\tilde{\gamma}$ ist eine Parabel: $x(t) = \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - z(t)^2$

$\underline{\underline{x^2 = 1 - z^2}}$

(e) $\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix}2\cos t\,(-\sin t)\\ \cos t\cos t + \sin t\,(-\sin t)\\ \cos t\end{pmatrix}$ ← Kettenregel ← Produktregel

$\vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{r}\,'(\pi) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ Tangentialvektoren in Z

Skalarprodukt: $\underbrace{\vec{r}\,'(0)}_{\neq\vec{0}}\cdot\underbrace{\vec{r}\,'(\pi)}_{\neq\vec{0}} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 0 + 1 - 1 = \underline{0}$

$\rightsquigarrow \vec{r}\,'(0) \perp \vec{r}\,'(\pi)$