

Ferienserie

1. Betrachte die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{h} \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) := (xy + \cos(y), x^2y, x), \quad g(x, y, z) := (x + y^2, \sin(z), xz)$$

und

$$h(x, y, z) := (x + y^2, z^2 + 1)$$

a) Berechne die Jacobi-Matrizen $J_f(x, y, z)$, $J_g(x, y, z)$ und $J_h(x, y)$

b) Berechne die Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ f$ und die Jacobi-Matrizen

$$J_{g \circ f}(x, y, z), \quad J_{h \circ g}(x, y), \quad J_{h \circ f}(x, y)$$

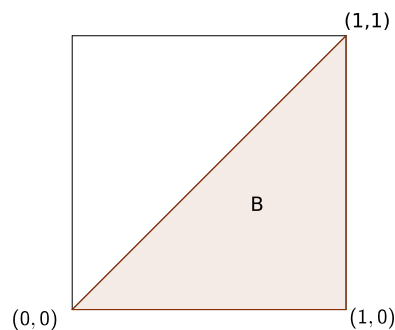
direkt, und

c) Berechne die Jacobi-Matrizen

$$J_{g \circ f}(x, y), \quad J_{h \circ g}(x, y, z), \quad J_{h \circ f}(x, y)$$

mit Hilfe der Kettenregel.

2. Betrachte den Bereich



Bitte wenden!

a) Schreibe B als Normalgebiet bezüglich der x -Achse, und fasse

$$\int_B e^{x^2} d(x, y),$$

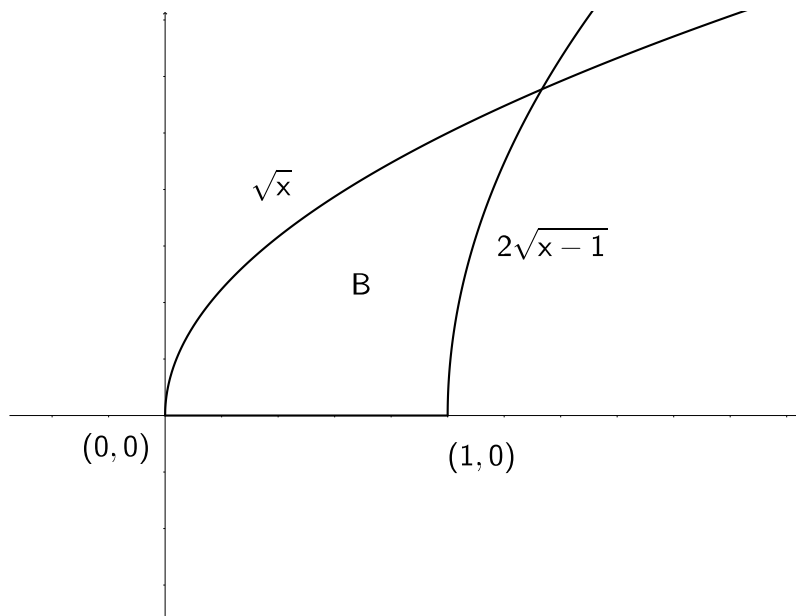
als iteriertes Integral auf. Ist dieses berechenbar?

b) Schreibe B als Normalgebiet bezüglich der y -Achse, und fasse

$$\int_B e^{x^2} d(x, y),$$

als iteriertes Integral auf. Ist dieses berechenbar?

3. Betrachte den Bereich



Berechne

$$\int_B xy^2 d(x, y)$$

4. Integriere $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ über den Kreis $x^2 + y^2 \leq 1$

a) direkt.

b) Sei $\Phi(r, \vartheta) := \begin{pmatrix} r \cos(\vartheta) \\ r \sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ Berechne $J_\Phi(r, \vartheta)$, $\det(J_\Phi(r, \vartheta))$.

Siehe nächstes Blatt!

c) Schreibe der Kreis als

$$D_{r,\vartheta} := \{(r, \vartheta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi\}$$

und berechne $f(\Phi(r, \vartheta))$ explizit.

d) (Optional) Unter Verwendung der Formel

$$\int_{D_{x,y}} f(x, y) d(x, y) = \int_{D_{r,\vartheta}} f(r, \vartheta) (\det(J_{\Phi}(r, \vartheta))) d(r, \vartheta)$$

Vorlesungshomepage: http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/mathematik1_chab