

Serie 6

1. Seien $V(x, y) := (-y, x)$, $W(x, y) = (x, -y)$ zwei Vektorfelder.

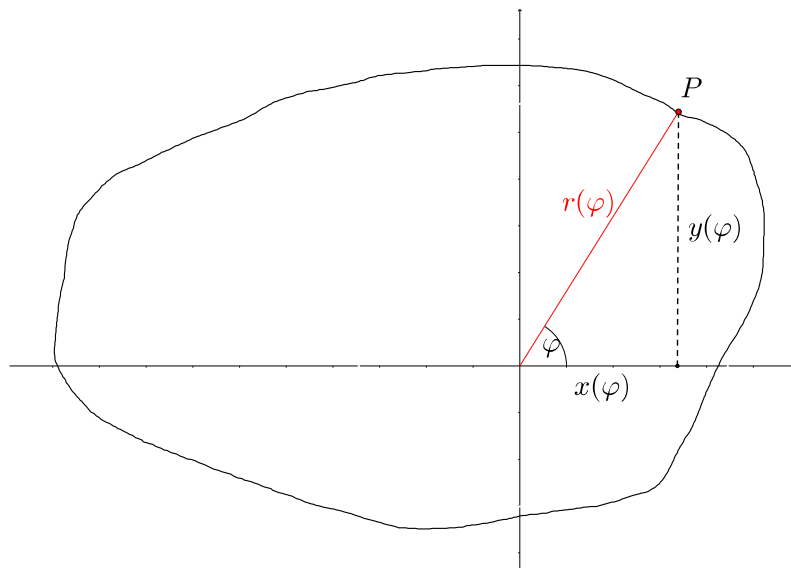
a) Zeichne und finde $\gamma(t)$ so dass $\dot{\gamma}(t) = V(\gamma(t))$,

b) Zeichne und finde $\gamma(t)$ so dass $\dot{\gamma}(t) = W(\gamma(t))$.

2. Eine Kurve sei in Polarkoordinaten durch

$$\gamma(r(\varphi), \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

gegeben



a) Setze $t = \varphi$ und schreibe $\gamma(t)$ in kartesischen Koordinaten

$$\gamma(t) := (x(t), y(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

b) Sei S die obige Fläche mit Inhalt $F(S)$. Verifiziere die Polarform der *Leibnizschen Sektorformel*

$$F(S) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r(\varphi)^2 d\varphi.$$

Bitte wenden!

3. Seien A und B zwei Punkte in der Ebene mit Abstand $|A - B| = 2d > 0$. Die *Lemniskate* L ist die Menge aller Punkte P , für welche

$$|P - A| \cdot |P - B| = d^2$$

gilt.

- a) Skizziere L .
- b) Finde eine Gleichung der Form $r = f(\varphi)$, so dass eine Schleife der Lemniskate in Polarkoordinaten mit Mittelpunkt $\frac{A - B}{2}$ als Koordinatenursprung durch

$$\{(r, \varphi) \mid r = f(\varphi)\}$$

gegeben ist.

- c) Verwende die Leibnizsche Sektorformel, um die von L eingeschlossene Fläche zu bestimmen.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Freitag/Montag, den 22.4./25.4.2016, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/mathematik1_chab