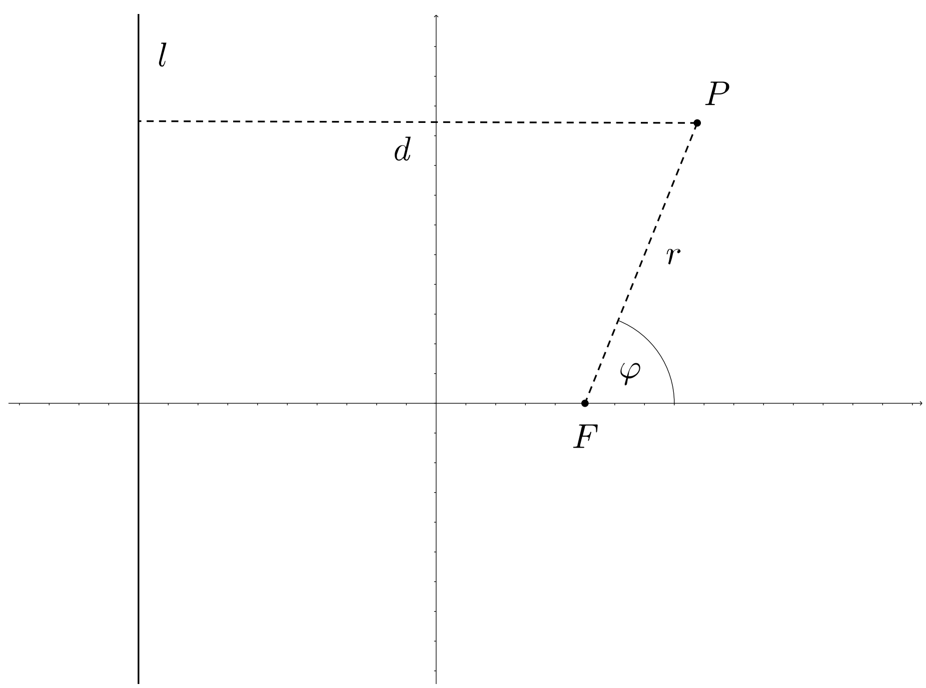
Die drei Keplerschen Gesetze (Serie 7)

1. *Polarkoordinatendarstellung von Ellipse, Hyperbel und Parabel.* Die *Leitlinie* l sei eine Gerade parallel zur y-Achse und der *Brennpunkt* F sei ein Punkt auf der x-Achse. Die *Exzentrizität* ist eine feste Zahl $\varepsilon > 0$. Für einen Punkt P in der Ebene bezeichne r den Abstand zu F und d den Abstand zu l.

Gesucht ist der geometrische Ort C aller Punkte P, deren Abstände zu F und l im Verhältnis

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

stehen.



a) Sei $p > 0$ der Abstand zwischen l und F. Es gilt $d = p + r\cos\varphi$. Zeige, dass

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

gilt.

Bitte wenden!

b) Die Kurve $(r(\varphi), \varphi)$ in Polarkoordinaten ist für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse und für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel. Plotte diese für $p = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}, 1, 2$.

2. Wie in der Vorlesung betrachten wir den Ort $x(t)$ eines Planeten der Masse m, der sich im Gravitationsfeld der Sonne mit Masse M bewegt. Wir wissen, dass der Drehimpuls und der Achsenvektor

$$J = x \times (m\dot{x}) \qquad A = \frac{J \times \dot{x}}{GMm} + \frac{x}{|x|}$$

konstant sind und dass sich der Planet in der Ebene E senkrecht zu J bewegt. Wir wählen das Koordinatensystem mit der Sonne im Ursprung, $e_1 \parallel A$, e_2 und $e_3 \parallel J$. In diesem Koordinatensystem gilt $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix}$ mit $j = m(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2)$.

a) Mit Hilfe von $(a \times b) \cdot c = \det(a, b, c)$ verifiziere, dass

$$A \cdot x = -\frac{j^2}{GMm^2} + |x|.$$

b) Sei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen A und $x(t)$. Mit $|A| = \varepsilon$ gilt dann

$$A \cdot x = \varepsilon |x| \cos(\varphi(t)).$$

Sei $r := |x|$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos\varphi}, \qquad \text{wobei} \qquad p = \frac{j^2}{GMm^2\varepsilon}.$$

3. Wir setzen $\xi = r\cos\varphi$ und $\eta = r\sin\varphi$.

a) Dann gilt wegen $\varepsilon^2 = \frac{r^2}{d^2}$ die Gleichung

$$\xi^2(1 - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2 p\xi + \eta^2 = \varepsilon^2 p^2.$$

b) Im Fall $\varepsilon = 1$ setze $x = \xi + \dfrac{p}{2}$ und $y = \eta$. Dann gilt $y^2 = 2px$.

c) Im Fall $\varepsilon < 1$ setze $x = \xi - \dfrac{p\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$ sowie $a = \dfrac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}$ und $b = \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$. Es gilt dann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Siehe nächstes Blatt!

d) Im Fall $\varepsilon > 1$ setze $x = \xi - \dfrac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ sowie $a = \dfrac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$ und $b = \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$. Es gilt dann

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. Die Keplerschen Gesetze:

a) Der Planet bewegt sich auf einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel und die Sonne befindet sich in einem Brennpunkt.

b) Der Fahrstrahl r überstreicht in der Zeit t die Fläche $F(t) = \frac{j}{2m}t$.

c) Bewegt sich der Planet auf einer Ellipsenbahn, so ist das Quadrat der Umlaufzeit proportional zur dritten Potenz der grossen Achse.

Hinweis: Die Ellipsenfläche ist πab. Bestimme damit die Umlaufzeit T und zeige $\frac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: Freitag/Montag, den 29.4./2.5.2016, in der Übungsstunde.

Vorlesungshomepage: `http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/mathematik1_chab`