Lösung 1

1. Finde eine Stammfunktion zu

a) $x^3 + 2x + 4$

Lösung. Es ist

$$(x^4)' = 4x^3, \quad (x^2)' = 2x, \quad (4x)' = 4.$$

Somit

$$\int x^3 + 2x + 4\,dx = \frac{x^4}{4} + x^2 + 4x + C.$$

b) $\cos(x)\sin(x)$

Lösung. Es ist

$$\big(\cos^2(x)\big)' = 2\cos(x)(-\sin(x)).$$

Somit

$$\int \cos(x)\sin(x)\,dx = -\frac{\cos^2(x)}{2} + C.$$

Bemerkung:
anderseits,

$$\big(\sin^2(x)\big)' = 2\cos(x)\sin(x).$$

Somit

$$\int \cos(x)\sin(x)\,dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + D.$$

Aus $-\frac{\cos^2(x)}{2} + C = \frac{\sin^2(x)}{2} + D$ folgt

$$0 = \frac{\cos^2(x)}{2} - C + \frac{\sin^2(x)}{2} + D,$$

d.h. $0 = \frac{1}{2} - C + D$ und $D = C - \frac{1}{2}$.

c) $e^{\cosh(x)}\sinh(x)$

Lösung. Es ist

$$(\cosh(x))' = \sinh(x),$$

und wir können die Formel

$$\int \varphi'(x)e^{\varphi(x)}\,dx = e^{(\varphi(x))} + C$$

verwenden. Somit

$$\int e^{\cosh(x)}\sinh(x)\,dx = e^{(\cosh(x))} + C.$$

d) $\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

Lösung. Es ist

$$(x^2+x)' = 2x+1,$$

und wir können die Formel

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln(|\varphi(x)|) + C$$

verwenden. Somit

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx = \ln(|x^2+x|).$$

e) $\dfrac{1}{9+x^2}$

Lösung. Mit

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}}$$

eignet sich die Substitution $\frac{x}{3} = u \quad \Rightarrow \quad dx = 3\,du$:

$$\frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan(u) + C = \frac{1}{3}\arctan(\tfrac{x}{3}) + C.$$

f) $\cos(2x)\cos(x)$

Lösung. Mit $\cos(2x) = (1 - 2\sin^2(x))$ erhalten wir

$$\int \cos(x)+\cos^3(x)\,dx = \int \cos(x)(1-2\sin^2(x))\,dx = \int \cos(x)-2\cos(x)\sin^2(x)\,dx$$

Also

$$\int \cos(x)-2\cos(x)\sin^2(x)\,dx = \int \cos(x)\,dx - \int 2\cos(x)\sin^2(x)\,dx = \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3(x) + C$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Berechne die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int e^x(x^2-1)\,dx$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\int \underset{\uparrow}{e^x}(\underset{\downarrow}{x^2-1})\,dx &= e^x(x^2-1) - 2\int \underset{\uparrow}{e^x}\underset{\downarrow}{x}\,dx \\
&= e^x(x^2-1) - 2xe^x + 2\int e^x\,dx \\
&= e^x x^2 - e^x - 2e^x x + 2e^x + C \\
&= e^x(x^2-2x+1) + C.
\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\int \cos(x) + \cos^3(x)\,dx$

Lösung. Mit

$$\int \cos(x)+\cos^3(x)\,dx = \int \cos(x)(1+\cos^2(x))\,dx = \int \cos(x)(2-\sin^2(x))\,dx$$

eignet sich die Substitution $\sin(x) = u \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos(x)}$:

$$\int \cos(x)(2-\sin^2(x))\,dx = \int (2-u^2)\,du = 2u - \frac{1}{3}u^3 + C = 2\sin(x) - \frac{1}{3}\sin^3(x) + C.$$

c) $\displaystyle\int \sinh(x)\cos(x)\,dx$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\int \underset{\uparrow}{\sinh(x)}\underset{\downarrow}{\cos(x)}\,dx &= \cosh(x)\cos(x) + \int \underset{\uparrow}{\cosh(x)}\underset{\downarrow}{\sin(x)}\,dx \\
&= \cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x) - \int \sinh(x)\cos(x)\,dx
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2\int \sinh(x)\cos(x)\,dx = \cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \qquad \int \sinh(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}(\cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x)) + C.$$

d) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

Lösung. Mit der Substitution

$$x^2+1 = u \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = u-1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{u-1} \quad \Rightarrow \quad dx = \tfrac{du}{2\sqrt{u-1}}$$

Bitte wenden!

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{(u-1)^{3/2}}{2\sqrt{u}\sqrt{u-1}}\,du &= \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2} - u^{-1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2}\right) + C \\
&= \left(\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} - \sqrt{x^2+1}\right) + C \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{x^2+1}(x^2-2) + C.
\end{aligned}$$

e) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \int \underset{\downarrow}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \underset{\uparrow}{1}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{1-1+x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh}(x) - \int \sqrt{x^2+1}\,dx \\
\Leftrightarrow \qquad 2\int \sqrt{x^2+1}\,dx &= x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh}(x) \\
\Leftrightarrow \qquad \int \sqrt{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh}(x)\right) + C.
\end{aligned}$$

3. Multiple choiche

1. Die Stammfunktion eines Polynom $p(x)$ ist immer noch ein Polynom.

$\surd$ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Siehe nächstes Blatt!

2. Die Stammfunktion einer rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist immer noch eine rationale Funktion.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Zum Beispiel $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x)$.

3. Die Funktion

$$x \mapsto x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + 7$$

ist eine Stammfunktion von $x \mapsto \arctan x$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+7\right) &= \arctan x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} + 0\\ &= \arctan x.\end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Es ist

$$\int 2\sin x \cos x \, dx = \sin^2 x + c, \qquad \text{aber auch}$$
$$\int 2\sin x \cos x \, dx = \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c,$$

also $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

(a) Richtig.

✓ (b) Falsch.

Es gelten

$$\frac{d}{dt}\left(\sin^2 x + c\right) = 2\sin x\, \cos x + 0 \qquad \text{und}$$
$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + c\right) = -\frac{1}{2}(-2\sin(2x)) + 0 = 2\sin x\, \cos x,$$

also unterscheiden sich die beiden Funktionen nur um eine Konstante. Es ist aber

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos(2x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) = \sin^2 x + \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Was auch einfach zu sehen ist, wenn man die Funktionen an der Stelle 0 auswertet:

$$\sin^2(0) = 0 \neq -\frac{1}{2}\cos(0) = -\frac{1}{2}.$$