Lösung 10

1. Sei $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ Berechne die Richtungsableitung von $f(x,y)$ in Richtung $\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$ bei P, wobei

a) $P = (2,0)$, $\varphi = 0$,

Lösung. Die Richtungsableitung in Richtung $e_\varphi = \begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial_{e_\varphi} f(x,y) &= df(x,y)\cdot e_\varphi\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{x}{2} & 2y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\varphi)\\ \sin(\varphi)\end{pmatrix}\\ &= \frac{x\cos(\varphi)}{2} + 2y\sin(\varphi)\end{aligned}$$

Also

$$\partial_{e_0} f(2,0) = 1$$

b) $P = (0,1)$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

Lösung.

$$\partial_{e_{\frac{\pi}{4}}} f(0,1) = 2\sin(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

c) $P = (0,0)$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

Lösung.

$$\partial_{e_{\frac{\pi}{2}}} f(0,0) = 0$$

2. Berechne die partiellen Ableitungen , die totale Ableitungen und die Ableitung in Richtung $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ von

Bitte wenden!

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

Lösung. Die partiellen Ableitungen lauten

$$\partial_x f(x,y) = 2x, \quad \partial_y f(x,y) = 2y.$$

Die totale Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_v f(x,y) &= df(x,y) \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2x - 2y \end{aligned}$$

b) $f(x,y) = e^x + y$

Lösung. Die partiellen Ableitungen lauten

$$\partial_x f(x,y) = e^x, \quad \partial_y f(x,y) = 1.$$

Die totale Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \partial_v f(x,y) &= df(x,y) \cdot v \\ &= \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= e^x - 1 \end{aligned}$$

c) $f(x,y) = \cos(xy)$

Lösung. Die partiellen Ableitungen lauten

$$\partial_x f(x,y) = -y\sin(xy), \quad \partial_y f(x,y) = -x\sin(xy).$$

Siehe nächstes Blatt!

Die totale Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\sin(xy) & -x\sin(xy)\end{pmatrix}$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\partial_v f(x,y) &= df(x,y)\cdot v\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-y\sin(xy) & -x\sin(xy)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= -y\sin(xy) + x\sin(xy)\end{aligned}$$

d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x}$

Lösung. Die partiellen Ableitungen lauten

$$\partial_x f(x,y) = \frac{y(1+x)-xy}{(1+x)^2} = \frac{y}{(1+x)^2}, \quad \partial_y f(x,y) = \frac{x}{1+x}.$$

Die totale Ableitung ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{y}{(1+x)^2} & \frac{x}{1+x}\end{pmatrix}$$

Die Richtungsableitung in Richtung $v = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ist gegeben durch

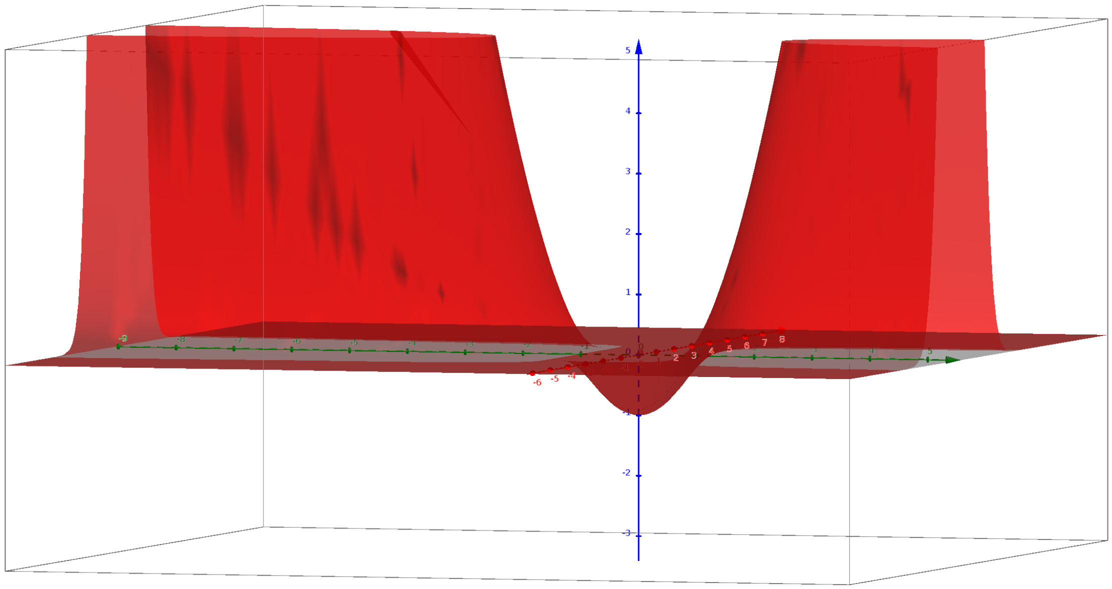
$$\begin{aligned}\partial_v f(x,y) &= df(x,y)\cdot v\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{y}{(1+x)^2} & \frac{x}{1+x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\ &= \frac{y}{(1+x)^2} - \frac{x}{(1+x)}\end{aligned}$$

3. Zeichne den Graph und bestimme Maxima, Minima und Sattelpunkte der folgenden Funktionen

a) $f(x,y) = e^{-x^2}\left(y^2-1\right)$

Lösung. Der Graph ist gegeben durch

Bitte wenden!



Die totale Ableitung lautet

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2xe^{-x^2}\left(y^2-1\right) & e^{-x^2}2y\end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix}-2xe^{-x^2}\left(y^2-1\right) & e^{-x^2}2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{cases}-2xe^{-x^2}\left(y^2-1\right) & = 0\\ e^{-x^2}2y & = 0\end{cases}$$

Es gilt $e^{-x^2}2y = 0$ genau dann wenn $y = 0$. Die erste Gleichung wird $-2xe^{-x^2}\left(0-1\right) = 0$, also $x = 0$.
(Lösung mit Hesse-Matrix) Die Hesse Matrix von $f(x,y)$ ist gegeben durch

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_x\partial_y f(x,y)\\ \partial_y\partial_x f(x,y) & \partial_y\partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(4x^2e^{-x^2}-2e^{-x^2}\right)\left(y^2-1\right) & -4xye^{-x^2}\\ -4xye^{-x^2} & 2e^{-x^2}\end{pmatrix}$$

Also gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Es folgt, dass $\det H_f(0,0) = 4 > 0$ und $\partial_x\partial_x f(0,0) = 2 > 0$. Also ist $(0,0)$ ein lokales Minimum.

Siehe nächstes Blatt!

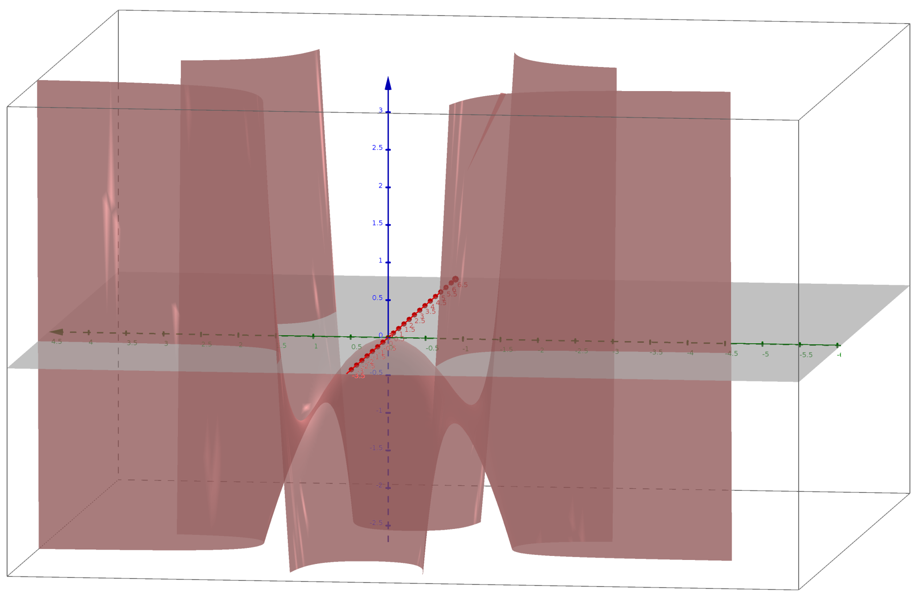
(Lösung ohne Hesse-Matrix) Es gilt

$$0 \leq e^{-x^2} \leq 1 \text{ für alle } x, \quad y^2 - 1 \leq 0 \text{ für alle } y \in [-1, 1]\,.$$

Also gilt $f(x, y) = e^{-x^2}\left(y^2 - 1\right) \leq 0$ für alle $y \in [-1, 1]$ und $f(x, y) > -1$ falls $x \neq 0$ oder $y \neq 0$. Das heisst dass $(0, 0)$ ein lokales Minimum ist.

b) $f(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2$

Lösung. Der Graph ist gegeben durch



Die totale Ableitung ist

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x, y) & \partial_y f(x, y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2xy^2 - 2x & 2yx^2 - 2y\end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix}2xy^2 - 2x & 2yx^2 - 2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2x &= 0 \\ 2yx^2 - 2y &= 0 \end{cases}$$

Es gibt folgende Möglichkeiten

- Falls $x = 0$, wird das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 0 &= 0 \\ 0 - 2y &= 0 \end{cases}$$

  Es folgt dass $y = 0$ sein muss.

Bitte wenden!

- Falls $y = 0$, wird das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 0 - 2x &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases}$$

Es folgt dass $x = 0$ sein muss.

- Falls $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gilt

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2x &= 0 \\ 2yx^2 - 2y &= 0 \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung erhält man $2xy^2 = 2x$, d.h. $y^2 = 1$, also $y = \pm 1$. Aus der zweiten Gleichung folgt $2yx^2 = 2y$, d.h. $x^2 = 1$ und $x = \pm 1$.

Die Punkte (x, y) so dass

$$\begin{pmatrix} 2xy^2 - 2x & 2yx^2 - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind $(0, 0)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$. Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x, y) := \begin{pmatrix} \partial_x \partial_x f(x, y) & \partial_x \partial_y f(x, y) \\ \partial_y \partial_y f(x, y) & \partial_y \partial_x f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y^2 - 2 & 4xy \\ 4yx & 2x^2 - 2 \end{pmatrix}$$

- Wenn $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist, gilt $\det H_f(0, 0) = 4 > 0$ und $\partial_x \partial_x f(0, 0) = -2 < 0$. Also ist $(0, 0)$ ein lokales Maximum.
- Falls $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ dann

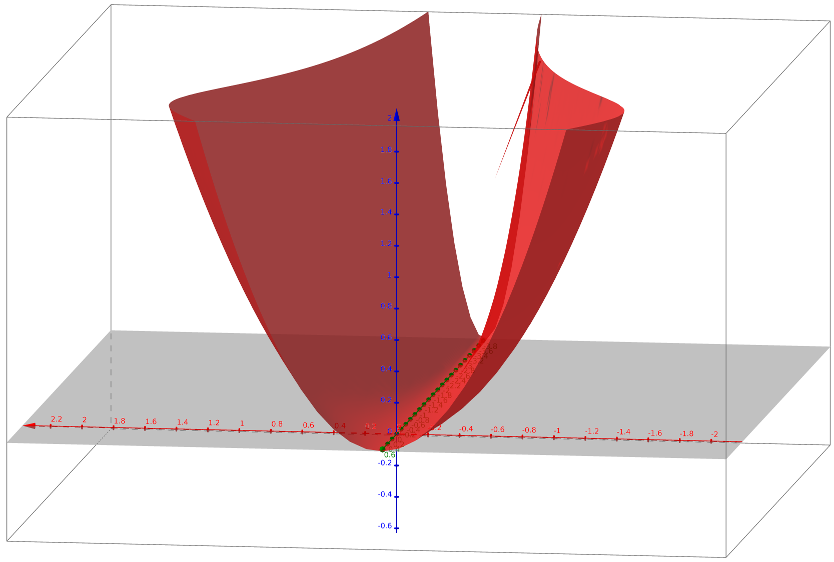
$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 4xy \\ 4xy & 0 \end{pmatrix}$$

also $\det H_f(x, y) = -16x^2y^2 = -16 < 0$. Es folgt dass $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$ Sattelpunkte sind.

c) $f(x, y) = x^2 + x^2y^2$

Lösung. Der Graph ist gegeben durch

Siehe nächstes Blatt!



Die totale Ableitung ist

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x(1+y^2)\,(y^2-1) & 2yx^2\end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix}2x(1+y^2) & 2yx^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

erhält man

$$\begin{cases} 2x(1+y^2) & = 0 \\ 2yx^2 & = 0 \end{cases}$$

Es gilt $2x(1+y^2) = 0$ genau dann wenn $x = 0$. Die zweite Gleichung wird $0 \cdot x^2 = 0$. Es folgt dass

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

genau dann wenn $y = 0$. Die Hesse-Matrix lautet

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_x\partial_y f(x,y) \\ \partial_y\partial_y f(x,y) & \partial_y\partial_x f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2(1+y^2) & 4yx \\ 4yx & 2x^2\end{pmatrix}$$

Also

$$\det H_f(0,y) = \det \begin{pmatrix}2(1+y^2) & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0,$$

d.h. man muss direkt verifizieren!
Man schreibe $f(x,y) = x^2(1+y^2)$. Dann gilt

$$x^2 \geq 0 \text{ für alle } x, \quad 1+y^2 \geq 1 \text{ für alle } y$$

Bitte wenden!

Also ist $f(x,y) = x^2(1+y^2) \geq 0$ für alle x, y und die Gleichheit $f(x,y) = 0$ gilt genau dann wenn $x = 0$. Es folgt dass die Punkten $(0, y)$ alle Minimum sind.

4. Multiple choiche

1. Sei $f(x,y)$ eine Funktion, für die $\partial_x f(0,0) = 0$ und $\partial_y f(0,0) = 0$ gilt; dann ist für jedes $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, die Richtungsableitung $\partial_v f(0,0) = 0$

(a) Falsch.

√ (b) Richtig

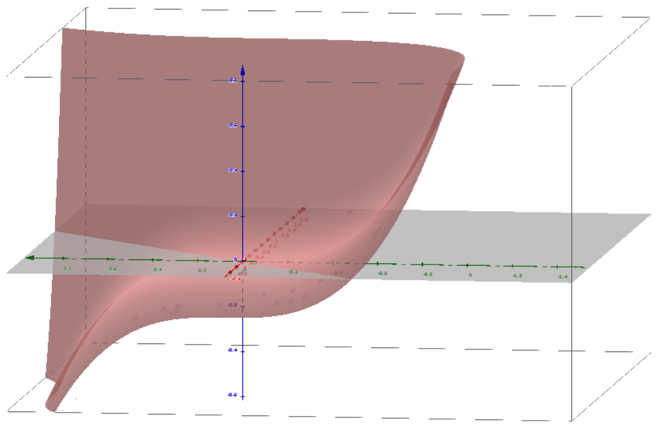
Es gilt

$$\begin{aligned} \partial_v f(0,0) &= df(0,0) \cdot v \\ &= 0 \end{aligned}$$

da $df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

.

2. Betrachte die Funktion $f(x, y) = x^3 - y^3$ mit Graph



Es gilt

$$df(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bei $(0, 0)$.

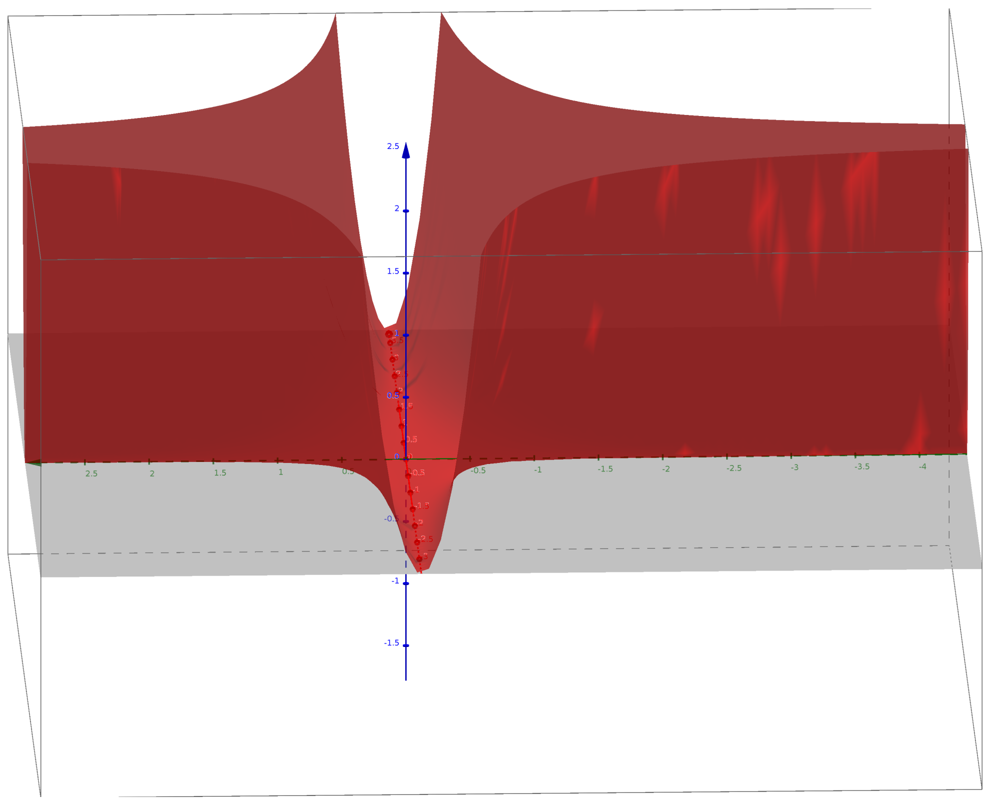
(a) $(0, 0)$ ist ein Maximum.

(b) $(0, 0)$ ist ein Minimum.

$\checkmark$ (c) $(0, 0)$ ist ein Sattelpunkt.

Bitte wenden!

3. Betrachte die Funktion $f(x, y) = x^2y^2$ mit Graph



Für eine feste $\vartheta \in [0, \pi]$, sei $\gamma_\vartheta(t)$ ein weg definiert durch

$$\gamma(t) =: f(\cos(\vartheta)t, \sin(\vartheta)t)$$

√ (a) $\gamma_0(t) = 0$

√ (b) $\gamma_{\frac{\pi}{2}}(t) = 0$

√ (c) $\partial_x \partial_x f(x, 0) = 0$.

√ (d) $\partial_y \partial_y f(0, y) = 0$.

(e) $\partial_t \partial_t \gamma_\vartheta(t) = 0$, für jede $\vartheta \in [0, \pi]$.