Lösung 11

1. Betrachte das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} \\ y(1) = -1 \end{cases} \qquad (*)$$

a) Bestimme die Lösung $y(x)$ von $(*)$.

Lösung. Die Differentialgleichung ist separierbar und wir erhalten

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{y(1)}^{y(x)} \frac{dy}{y^2} = \int_1^x \frac{dx}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{y}\bigg|_{-1}^{y(x)} = -\frac{1}{x}\bigg|_1^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{y(x)} = \frac{1-2x}{x}$$

und somit ist die gesuchte Lösung

$$y(x) = \frac{x}{1-2x}.$$

b) Ermittle den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} y(x)$.

Lösung.

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1-2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}-2} = -\frac{1}{2}.$$

2. Finde die reellen Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichung:

$$\ddot{u}(t) + 6\dot{u}(t) + 5u(t) = \sin(t)$$

Lösung.

Die homogene Gleichung hat das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 5$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -5$ und $\lambda_2 = -1$, also bilden $u_1(t) = e^{-5t}$ und $u_2(t) = e^{-t}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen. Somit lautet die Lösung der homogenen Gleichung

$$u_h(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t}, \quad C_i \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden!

a) Direkt mit Variation der Konstanten.

Variation der Konstanten besagt nun $\begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-t} \\ -5e^{-5t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$,

also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{-5t} & e^{-t} \\ -5e^{-5t} & -e^{-t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{4e^{-6t}} \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} \\ 5e^{-5t} & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-e^{5t}}{4} & \frac{-e^{5t}}{4} \\ \frac{e^{t}}{4} & \frac{e^{t}}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{e^{5t}}{4} \sin(t) \\ \frac{e^{t}}{4} \sin(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Und somit ergeben sich mit partieller Integration einerseits

$$\begin{aligned} -4F_1(t) &= \int e^{5t} \sin(t)\, dt \\ &= \frac{e^{5t}}{5} \sin(t) - \int \frac{e^{5t}}{5} \cos(t)\, dt \\ &= \frac{e^{5t}}{5} \sin(t) - \frac{e^{5t}}{25} \cos(t) - \frac{1}{5} \int \frac{e^{5t}}{5} \sin(t)\, dt \\ \Leftrightarrow \quad F_1(t) &= \frac{e^{5t}}{104} (\cos(t) - 5\sin(t)) \end{aligned}$$

und anderseits

$$\begin{aligned} 4F_2(t) &= \int e^{t} \sin(t)\, dt \\ &= e^{t} \sin(t) - \int e^{t} \cos(t)\, dt \\ &= e^{t} \sin(t) - e^{t} \cos(t) - \int e^{t} \sin(t)\, dt \\ \Leftrightarrow \quad F_2(t) &= \frac{e^{t}}{8} (\sin(t) - \cos(t)), \end{aligned}$$

Die partikuläre Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} u_p(t) &= F_1(t) u_1(t) + F_2(t) u_2(t) \\ &= \frac{e^{5t}}{104} (\cos(t) - 5\sin(t)) e^{-5t} + \frac{e^{t}}{8} (\sin(t) - \cos(t)) e^{-t} \\ &= \frac{(\cos(t) - 5\sin(t))}{104} + \frac{\sin(t) - \cos(t)}{8} \\ &= \frac{-3\cos(t)}{26} + \frac{\sin(t)}{13} \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Damit ergibt sich für die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) + u_p(t) \\ &= C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + F_1(t) u_1(t) + F_2(t) u_2(t) \\ &= C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t} + \frac{-3\cos(t)}{26} + \frac{\sin(t)}{13}. \end{aligned}$$

b) Mit Hilfe von Komplexifizierung, und den Ansatz aus der Vorlesung.

Es gilt $\sin(t) = \mathfrak{Im}(e^{it})$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\ddot{u}(t) + 6\dot{u}(t) + 5u(t) = e^{it}. \qquad (*)$$

Wir haben $\chi(i) = i^2 + 6i + 5 = 6i + 4 \neq 0$, also i ist keine Nulstelle des charakteristisches Polynoms $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 5$. Mit dem Ansatz aus der Vorlesung, ist eine Lośung von $(*)$ gebeben durch

$$v_p(t) = \frac{e^{it}}{\chi(i)} = \frac{e^{it}}{6i+4}.$$

Es gilt $\frac{1}{6i+4} = \frac{1}{-6i+4}\frac{-6i+4}{-6i+4} = \frac{-6i+4}{52}$. Also

$$\begin{aligned} \frac{e^{it}}{6i-4} &= e^{it}\frac{-6i+4}{52} \\ &= (\cos(t) + i\sin(t))\,\frac{-6i+4}{52} \\ &= \frac{4\cos(t) + 6\sin(t)}{52} + \frac{-6i\cos(t) + 4i\sin(t)}{52} \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung wissen wir dass $u_p(t) = \mathfrak{Im}\left(v_p(t)\right) = \frac{-6\cos(t)+4\sin(t)}{52}$ eine Lösung von $(*)$ ist.

$$\begin{aligned} u_p(t) := \mathfrak{Im}\left(v_p(t)\right) &= \frac{-6\cos(t) + 4\sin(t)}{52} \\ &= \frac{-3\cos(t)}{26} + \frac{\sin(t)}{13} \end{aligned}$$

eine partikuläre Lösung von

$$\ddot{u}(t) + 6\dot{u}(t) + 5u(t) = \sin(t)$$

ist. Damit ergibt sich für die Lösung der Differentialgleichung

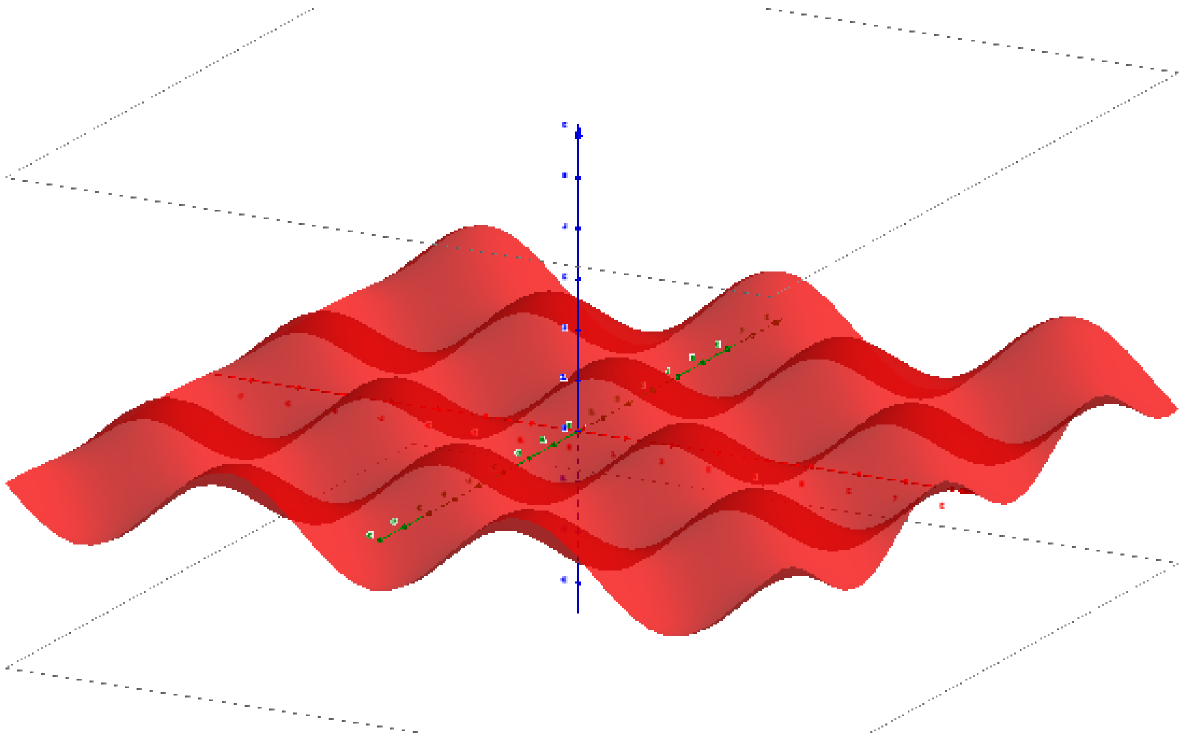
$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) + u_p(t) \\ &= C_1 u_1(t) + C_2 u_2(t) + F_1(t) u_1(t) + F_2(t) u_2(t) \\ &= C_1 e^{-5t} + C_2 e^{-t} + \frac{-3\cos(t)}{26} + \frac{\sin(t)}{13}. \end{aligned}$$

Bitte wenden!

3. Zeichne den Graph und bestimme lokale Maxima und Minima sowie Sattelpunkte der folgenden Funktionen

a) $f(x,y) = 1 - x^3 - y^2 + x^3y^2$

Lösung. Der Graph ist gegeben durch



Die totale Ableitung lautet

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3x^2 + 3x^2y^2 & -2y + 2x^3y\end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix}-3x^2 + 3x^2y^2 & -2y + 2x^3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{cases} 3x^2 + 3x^2y^2 & = 0 \\ -2y + 2x^3y & = 0 \end{cases}$$

Es muss also $x^2(1-y^2) = 0$ und $y(1-x^3) = 0$ gelten.

Falls $x = 0$ dann $y(1-0^3) = 0$ und $y = 0$,

Falls $x \neq 0$ dann $x^2(1-y^2) = 0$ impliziert $(1-y^2) = 0$ und $y = \pm 1$. Die Gleichung $y(1-x^3) = 0$ impliziert $(1-x^3) = 0$ und $x = 1$.

Siehe nächstes Blatt!

Die Kandidaten sind $(0,0)$, $(1,-1)$ und $(1,1)$. Die Hesse Matrix von $f(x,y)$ ist gegeben durch

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix} \partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_x\partial_y f(x,y) \\ \partial_y\partial_x f(x,y) & \partial_y\partial_y f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x\left(y^2-1\right) & 6x^2y \\ 6x^2y & 2(x^3-1) \end{pmatrix}$$

Also gilt

Falls $x = y = 0$ dann gilt

$$H_f(0,0) := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also $\det\left(H_f(0,0)\right) = 0$, d.h. man muss direkt verifizieren. Wir haben

$$f(x,0) = 1 - x^3.$$

Es folgt dass $(0,0)$ ein Sattelpunkt ist.

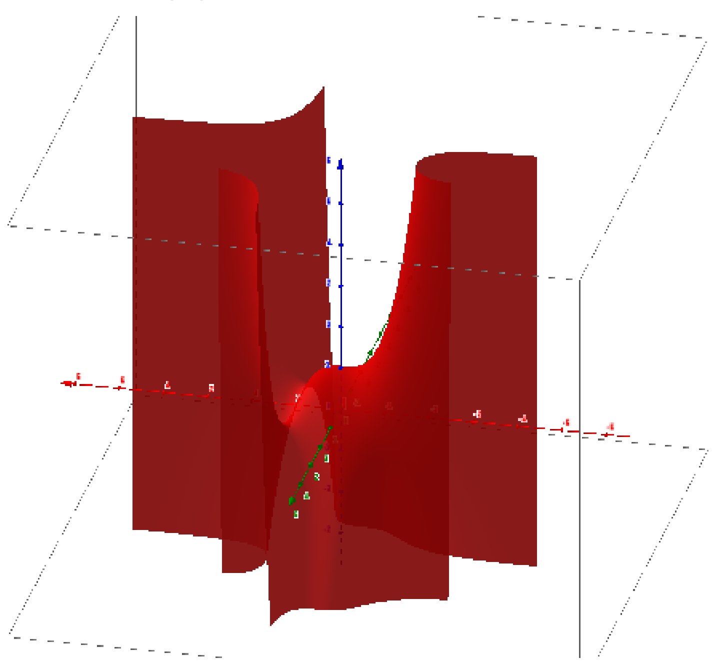
Falls $x = 1$ dann

$$H_f(1,y) := \begin{pmatrix} 6\left(y^2-1\right) & 6y \\ 6y & 0 \end{pmatrix}$$

und $\det\left(H_f(1,y)\right) = -6y^2 < 0$. Es folgt dass $(1,-1)$ und $(1,1)$ Sattelpunkte sind.

b) $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$

Lösung. Der Graph ist gegeben durch



Bitte wenden!

Die totale Ableitung lautet

$$\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y) & \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y)\end{pmatrix}$$

Aus

$$\begin{pmatrix}-\sin(x)\sin(y) & \cos(x)\cos(y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

folgt

$$\begin{cases}-\sin(x)\sin(y) & = 0\\ \cos(x)\cos(y) & = 0\end{cases}$$

- Falls $\sin(y) = 0$ dann $y = \frac{\pi}{2} + k_2\pi$ für $k_2 \in \mathbb{Z}$. Das impliziert $\cos(y) \neq 0$ und $\cos(x) = 0$. Also $x = k_1\pi$ für $k_1 \in \mathbb{Z}$.
- Falls $\sin(y) \neq 0$ dann $\sin(x) = 0$. Dann ist $x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi$ für $k_3 \in \mathbb{Z}$. Das impliziert $\cos(x) \neq 0$ und $\cos(y) = 0$. Also $y = k_4\pi$ für $k_4 \in \mathbb{Z}$.

Die Kandidaten sind $(k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi)$ und $(\frac{\pi}{2} + k_3\pi, k_4\pi)$ für k_1, k_2, k_3, und $k_4 \in \mathbb{Z}$. Die Hesse Matrix von $f(x,y)$ ist gegeben durch

$$H_f(x,y) := \begin{pmatrix}\partial_x\partial_x f(x,y) & \partial_x\partial_y f(x,y)\\ \partial_y\partial_x f(x,y) & \partial_y\partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y)\\ -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y)\end{pmatrix}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}\det H_f(x,y) &= \cos^2(x)\sin^2(y) - \sin^2(x)\cos^2(y)\\ &= \cos^2(x)\sin^2(y) - \sin^2(x)\left(1-\sin^2(y)\right)\\ &= \sin^2(y) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

1. Sei $(x,y) = (k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi)$ für $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\det H_f(k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi) = 1 > 0$$

Wir haben

$$\partial_x\partial_x f(k_1\pi, \frac{\pi}{2}+k_2\pi) = -\cos(k_1\pi)\sin(\frac{\pi}{2}+k_2\pi) = -(-1)^{k_1}(-1)^{k_2} = (-1)^{1+k_1+k_2}$$

Es folgt dass

$$\partial_x\partial_x f(k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi) = \begin{cases}-1 & \text{falls } k_1 + k_2 \text{ gerade}\\ 1 & \text{falls } k_1 + k_2 \text{ ungerade}\end{cases}$$

Der Punkt $(x,y) = (k_1\pi, \frac{\pi}{2} + k_2\pi)$ ist ein lokales Maximum falls $k_1 + k_2$ gerade ist und ein lokales Minimum falls $k_1 + k_2$ ungerade.

Siehe nächstes Blatt!

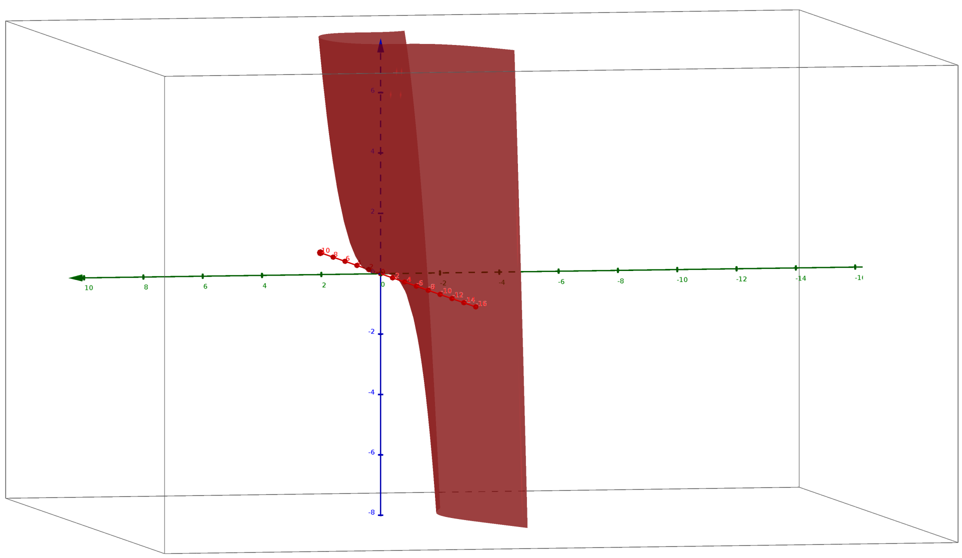
2. Sei $(x,y) = (\frac{\pi}{2} + k_3\pi, k_4\pi)$ für $k_3, k_4 \in \mathbb{Z}$. Dann

$$\det H_f(\frac{\pi}{2} + k_3\pi, k_4\pi) = -1 < 0$$

also ist $(x,y) = (\frac{\pi}{2} + k_3\pi, k_4\pi)$ ein Sattelpunkt.

4. Multiple Choice

1. Welche der folgenden Funktionen $f(x,y)$ ist im Bild graphisch dargestellt?



(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$

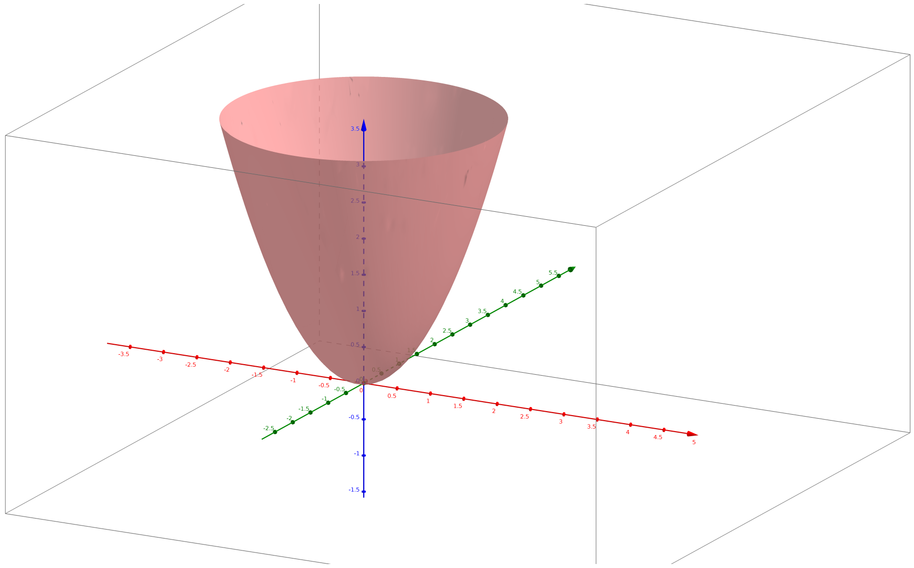
(c) $f(x,y) = x^2$

√ (d) $f(x,y) = x^2 + y^3$

(e) $f(x,y) = 3x^2y - y^3$

Bitte wenden!

2. Welche der folgenden Funktionen $f(x, y)$ ist im Bild graphisch dargestellt?



√ (a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

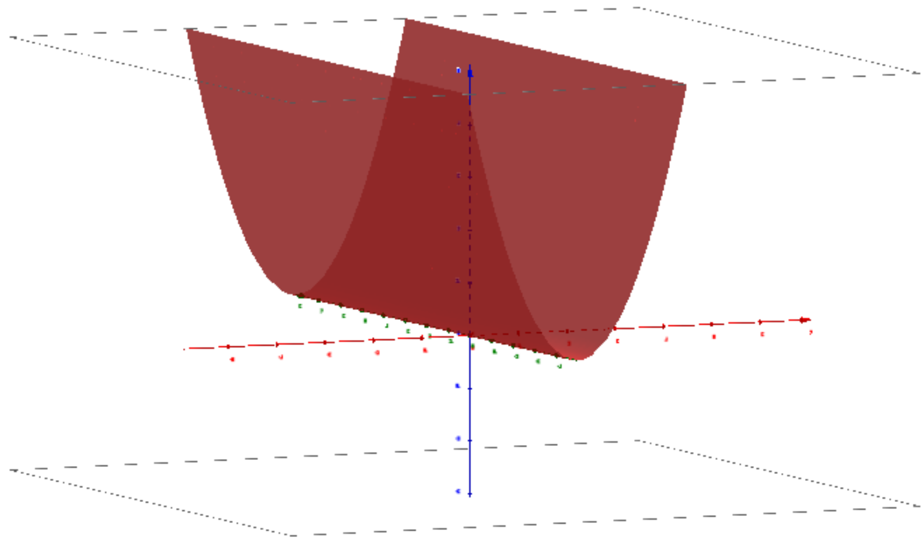
(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = x^2$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^3$

(e) $f(x, y) = 3x^2y - y^3$

3. Welche der folgenden Funktionen $f(x, y)$ ist im Bild graphisch dargestellt?



(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

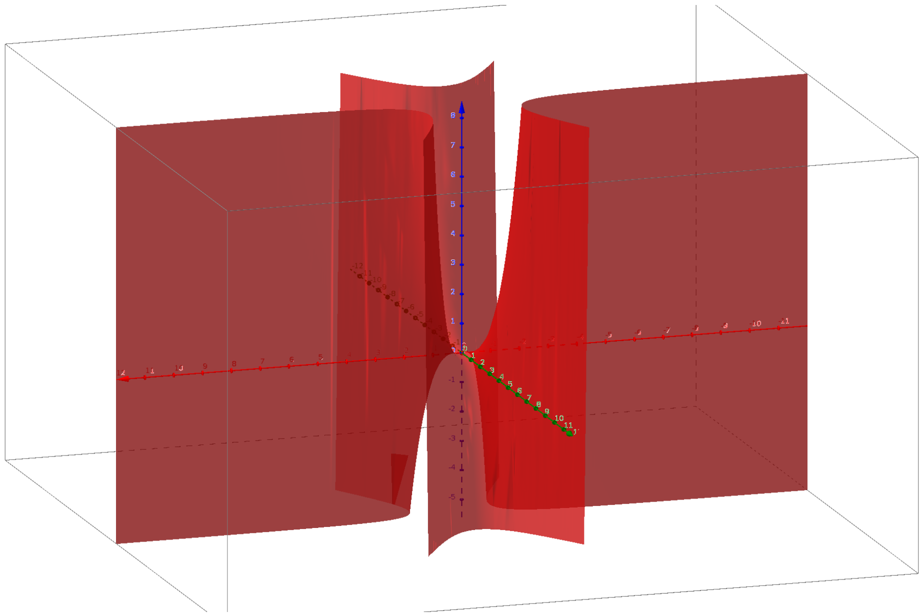
√ (c) $f(x, y) = x^2$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^3$

(e) $f(x, y) = 3x^2y - y^3$

Bitte wenden!

4. Welche der folgenden Funktionen $f(x, y)$ ist im Bild graphisch dargestellt?



(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

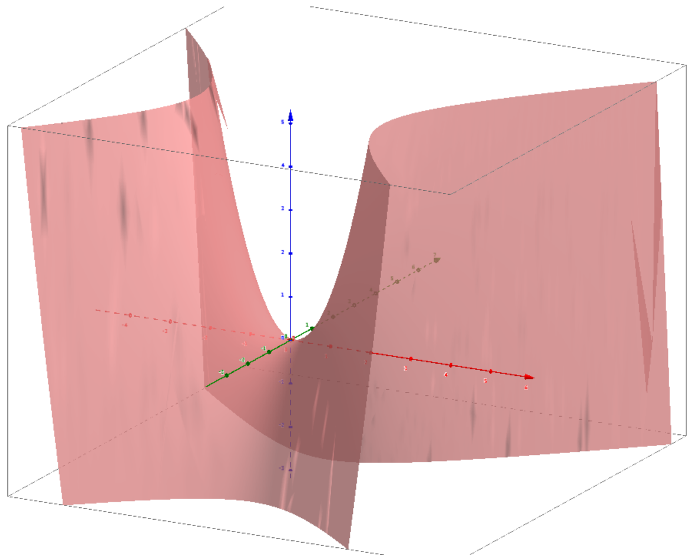
(c) $f(x, y) = x^2$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^3$

$\surd$ (e) $f(x, y) = 3x^2y - y^3$

Siehe nächstes Blatt!

5. Welche der folgenden Funktionen $f(x, y)$ ist im Bild graphisch dargestellt?



(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

√ (b) $f(x, y) = x^2 - y^2$

(c) $f(x, y) = x^2$

(d) $f(x, y) = x^2 + y^3$

(e) $f(x, y) = 3x^2y - y^3$