Lösung 12

1. Gesucht ist für die folgenden Funktionen das Taylorpolynom 2-ten Grades um $(0,0)$. Berechne dieses einerseits durch direktes Einsetzen in die Definition, andererseits durch Verwenden von bekannten Potenzreihen.

a) $\cos(xy)$,

Lösung.

1. (Direkt) Das Taylorpolynom 2-ten Grades um (a_1, a_2) ist

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(a_1,a_2) + (x-a_1)f_x(a_1,a_2) + (y-a_2)f_y(a_1,a_2) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[(x-a_1)^2 f_{xx}(a_1,a_2) + 2(x-a_1)(y-a_2)f_{xy}(a_1,a_2) + (y-a_2)^2 f_{yy}(a_1,a_2)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f(x,y) & = & \cos(xy) & \Rightarrow & f(0,0) & = & 1 \\ f_x(x,y) & = & -y\sin(xy) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 0 \\ f_y(x,y) & = & -x\sin(xy) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 0 \\ f_{xx}(x,y) & = & -y^2\sin(xy) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 0 \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) & = & -\sin(xy) - y\cos(xy) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 0 \\ f_{yy}(x,y) & = & -x^2\cos(xy) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & 0 \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= 1 + 0(x-0) + 0(y-0) + \frac{1}{2}\left[0(x-0)^2 + 2(x-0)(y-0)0 + (0)(y-0)^2\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

.

2. (Mit Potenzreihen) Es gilt

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Die Taylorreihe von $\cos(xy)$ ist gegeben duch

$$\cos(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(xy)^{2n}}{(2n)!}$$

also $T_2(x,y) = \sum_{n=0}^{0} (-1)^n \frac{(xy)^{2n}}{(2n)!} = 1$.

b) xe^{x+y},

Lösung.

1. (Direkt)

$$\begin{array}{ccccccc}
f(x,y) & = & xe^{x+y} & \Rightarrow & f(0,0) & = & 0 \\
f_x(x,y) & = & e^{x+y}+xe^{x+y} & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 1 \\
f_y(x,y) & = & xe^{x+y} & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 0 \\
f_{xx}(x,y) & = & e^{x+y}+e^{x+y}+xe^{x+y} & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 2 \\
f_{xy}(x,y)=f_{xy}(x,y) & = & e^{x+y}+xe^{x+y} & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 1 \\
f_{yy}(x,y) & = & xe^{x+y} & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & 0
\end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) &= 0+1(x-0)+0(y-0)+\frac{1}{2}\left[2(x-0)^2+1(x-0)(y-0)+(0)(y-0)^2\right] \\
&= x+x^2+xy
\end{aligned}$$

.

2. (Mit Potenzreihen) Setze $z=x+y$. Wir haben

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

also

$$\begin{aligned}
xe^{x+y} &= xe^z \\
&= x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}\right) \\
&= x\left(1+x+y+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\dots\right) \\
&= x+x^2+xy+\frac{x^3}{2}+\frac{xy^2}{2}+x^2y+\dots.
\end{aligned}$$

also $T_2(x)=x+x^2+xy$.

c) $e^x\ln(1+y)$

Lösung.

Siehe nächstes Blatt!

1. (Direkt)

$$\begin{array}{ccccccc}
f(x,y) & = & e^x \ln(1+y) & \Rightarrow & f(0,0) & = & 0 \\
f_x(x,y) & = & e^x \ln(1+y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 0 \\
f_y(x,y) & = & e^x (1+y)^{-1} & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 1 \\
f_{xx}(x,y) & = & e^x \ln(1+y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xy}(x,y) = f_{xy}(x,y) & = & e^x (1+y)^{-1} & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 1 \\
f_{yy}(x,y) & = & -e^x (1+y)^{-2} & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & -1
\end{array}$$

Wir haben

$$T_2(x,y) = 0 + 0(x-0) + 1(y-0) + \frac{1}{2}\left[0(x-0)^2 + 2(x-0)(y-0) + (-1)(y-0)^2\right]$$
$$= y + xy - \frac{y^2}{2}$$

2. (Mit Potenzreihen) Wir haben

$$e^x \ln(1+y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(y)^n}{n!}\right) = y + xy - \frac{y^2}{2} + \dots$$

also

$$T_2(x,y) = y + xy - \frac{y^2}{2}$$

2. Berechne die Rotation der folgenden Vektorfelder

$$\begin{aligned}
V_1(x,y) &= \begin{pmatrix} 2xy + \cos(x)\cos(y) \\ x^2 - \sin(x)\sin(y) \end{pmatrix} \\
V_2(x,y) &= \begin{pmatrix} -xy^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \\
V_3(x,y) &= \begin{pmatrix} \ln(xy) + \sin(x) \\ x^2 \end{pmatrix} \\
V_4(x,y,z) &= \begin{pmatrix} y\cos(xy) + yz \\ x\cos(xy) + xz \\ xy \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Lösung. Es sind

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} V_1 &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - \sin(x)\sin(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy + \cos(x)\cos(y)) \\ &= 2x - \cos(x)\sin(y) - 2x + \cos(x)\sin(y) \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\operatorname{rot} V_2 = \frac{\partial}{\partial x} y^3 - \frac{\partial}{\partial y}(-xy^2) = 0 + 2xy,$$

$$\operatorname{rot} V_3 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(xy) + \sin(x)\right) = 2x - \frac{1}{y},$$

Für $i = 4$, ist $\operatorname{rot} V_i$ gegeben durch

$$\operatorname{rot} V_i = \nabla \times V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} V_{i1} \\ V_{i2} \\ V_{i3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{i3}}{\partial y} - \frac{\partial V_{i2}}{\partial z} \\ \frac{\partial V_{i1}}{\partial z} - \frac{\partial V_{i3}}{\partial x} \\ \frac{\partial V_{i2}}{\partial x} - \frac{\partial V_{i1}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Es sind

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial V_{i3}}{\partial y} - \tfrac{\partial V_{i2}}{\partial z} &= \tfrac{xy}{\partial y} - \tfrac{x\cos(xy)+xz}{\partial z} = 0 \\ \tfrac{\partial V_{i1}}{\partial z} - \tfrac{\partial V_{i3}}{\partial x} &= \tfrac{y\cos(xy)+yz}{\partial z} - \tfrac{xy}{\partial x} = 0 \\ \tfrac{\partial V_{i2}}{\partial x} - \tfrac{\partial V_{i1}}{\partial y} &= \tfrac{x\cos(xy)+xz}{\partial x} - \tfrac{y\cos(xy)+yz}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ein Vektorfeld V heisst *wirbelfrei*, wenn $\operatorname{rot} V = 0$ gilt. Somit sind V_1, V_4 wirbelfrei, V_2, V_3 hingegen nicht.

3. Sind die Vektorfelder V_1, V_2, V_3, V_4 Potentialfeldern? Gib, wenn nein eine Begründung, wenn ja eine Potentialfunktion an.

Lösung. Ist V_1 ein Potentialfeld, so existiert ein Potential $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $\nabla f_1 = V_1$, das heisst

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_1}{\partial x} = V_{11} = 2xy + \cos(x)\cos(y) \\ \Rightarrow \quad & f_1(x,y) = \int 2xy + \cos(x)\cos(y)\, dx \\ & \qquad = x^2 y + \sin(x)\cos(y) + C(y) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2 - \sin(x)\sin(y) + \frac{\partial}{\partial y} C(y) = x^2 - \sin(x)\sin(y) \\ \Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial y} C(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y) = c, \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

und somit ist $f_1(x,y) = x^2y + \sin(x)\cos(y) + c$ ein Potential von V_1, wobei c eine Konstante ist.
Wegen $\operatorname{rot} V_i \neq 0$ ist V_i kein Potentialfeld für $i = 2, 3$. Ist V_4 ein Potentialfeld, so existiert ein Potential $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f_4 = V_4$, das heisst

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f_4}{\partial x} = y\cos(xy) + yz \\
\Rightarrow \quad & f_4(x,y,z) = \int y\cos(xy) + yz\, dx \\
& = \sin(xy) + xyz + C(y,z) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial f_4}{\partial y} = x\cos(xy) + xz + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z) = x\cos(xy) + xz \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial y}C(y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y,z) = C(z), \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial f_4}{\partial z} = \frac{\sin(xy) + xyz + C(z)}{\partial z} = xy \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial}{\partial z}C(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad C(z) = c,
\end{aligned}$$

und somit ist $f_4(x,y,z) = \sin(xy) + xyz + c$ ein Potential von V_4, wobei c eine Konstante ist.

4. Multiple Choiche
Wir betrachten das Vektorfeld

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\sin(x)\cos(x) + y\log(z) \\ x\log(z) \\ \frac{xy}{z} \end{pmatrix}$$

auf $\{(x,y,z) \mid z > 0\}$.

Bitte wenden!

1. Ist V wirbelfrei?

$\checkmark$ (a) Ja

(b) Nein

Nachrechnen:

$$\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} \frac{x}{z} - \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} - \frac{y}{z} \\ \log(z) - \log(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also ist das Vektorfeld wirbelfrei.

2. Welche der folgenden Funktionen sind Potentiale von V?

$\checkmark$ (a) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + xy\log(z)$

(b) $\sin(2x) + \frac{xy}{z}$

$\checkmark$ (c) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + xy\log(z) + 1234.$

(d) $\sin^2(x) + \frac{xy}{z}$

$\checkmark$ (e) $\sin^2(x) + xy\log(z) - 27$

(f) Keine der obigen Funktionen ist ein Potential von V.