Lösung 13

1. Betrachte die Funktionen

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[f]{} \mathbb{R}^3 \xrightarrow[g]{} \mathbb{R}^3 \xrightarrow[h]{} \mathbb{R}^2$$

$$f(x,y) := \big(xy + \cos(y), x^2y, x\big), \quad g(x,y,z) := \big(x + y^2, \sin(z), xz\big)$$

und

$$h(x,y,z) := \big(x + y^2, z^2 + 1\big)$$

a) Berechne die Jacobi-Matrizen $J_f(x,y)$, $J_g(x,y,z)$ und $J_h(x,y,z)$

Lösung. Wir haben

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y & x - \sin(y) \\ 2xy & x^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & \cos(z) \\ z & 0 & x \end{pmatrix} \quad J_h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

b) Berechne die Kompositionen $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ f$ und die Jacobi-Matrizen

$$J_{g\circ f}(x,y), \quad J_{h\circ g}(x,y,z), \quad J_{h\circ f}(x,y)$$

direkt, und

Lösung. Wir haben

$$\begin{aligned} g \circ f(x,y) &= \big(xy + \cos(y) + x^4y^2, \sin(x), x^2y + x\cos(y)\big) \\ h \circ g(x,y,z) &= \big(x + y^2 + \sin^2(z), x^2z^2 + 1\big) \\ h \circ f(x,y) &= \big(xy + \cos(y) + x^4y^2, x^2 + 1\big) \end{aligned}$$

Wir haben

$$J_{g\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} y + 4x^3y^2 & x - \sin(y) + 2x^4y \\ \cos(x) & x^2 - x\sin(y) \\ 2xy & 0 \end{pmatrix} \quad J_{h\circ g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2y & 2\sin(z)\cos(z) \\ 2xz^2 & 0 & 2x^2z \end{pmatrix}$$

und

$$J_{h\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} y + 4x^3y^2 & x - \sin(y) + 2x^4y \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Bitte wenden!

c) Berechne die Jacobi-Matrizen

$$J_{g\circ f}(x,y), \quad J_{h\circ g}(x,y,z), \quad J_{h\circ f}(x,y)$$

mit Hilfe der Kettenregel.

Lösung. Wir haben $J_{g\circ f}(x,y) = (J_g f(x,y)) \cdot J_f(x,y)$. Also

$$J_{g\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & \cos(x) \\ x & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x - \sin(y) \\ 2xy & x^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

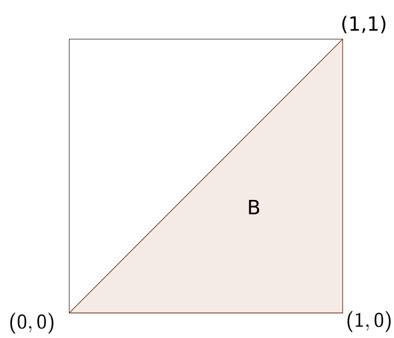
Wir haben $J_{h\circ g}(x,y,z) = (J_h g(x,y,z)) \cdot J_g(x,y,z)$. Also

$$J_{h\circ g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 2\sin(z) & 0 \\ 0 & 0 & 2xz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & \cos(z) \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

Wir haben $J_{h\circ f}(x,y) = (J_h f(x,y)) \cdot J_f(x,y)$. Also

$$J_{h\circ f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2x^2y & 0 \\ 0 & 0 & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x - \sin(y) \\ 2xy & x^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Betrachte den Bereich



2.

a) Schreibe B als Normalgebiet bezüglich der x-Achse, und fasse

$$\int_B e^{x^2} d(x,y),$$

Siehe nächstes Blatt!

als iteriertes Integral auf. Ist dieses berechenbar?

Lösung. Es gilt $B := \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$. Dann

$$\begin{aligned}\int_B e^{x^2} d(x,y) &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left(ye^{x^2}\right)|_0^x dx \\ &= \int_0^1 xe^{x^2} dx \\ &= \frac{e^{x^2}}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}(e-1)\end{aligned}$$

b) Schreibe B als Normalgebiet bezüglich der y-Achse, und fasse

$$\int_B e^{x^2} d(x,y),$$

als iteriertes Integral auf. Ist dieses berechenbar?

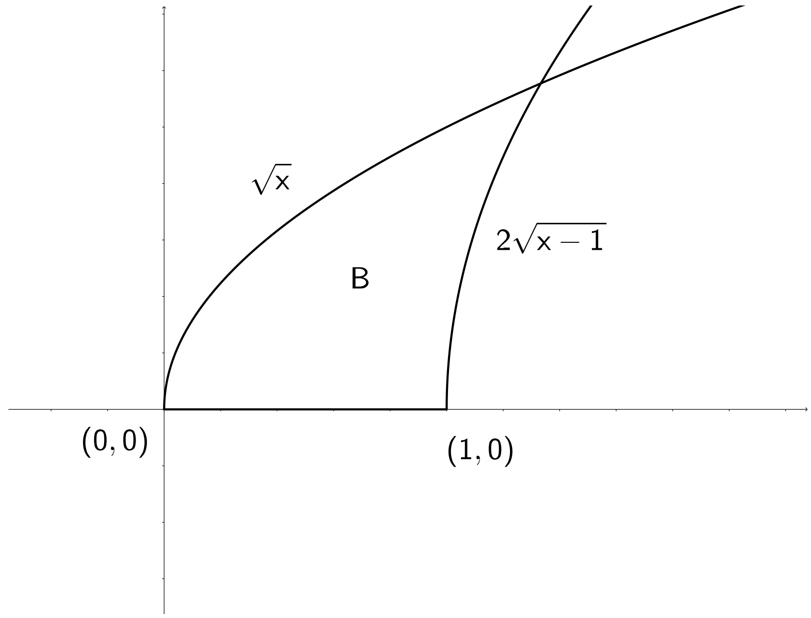
Lösung. Es gilt $B := \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 1,\ y \leq x \leq 1\}$. Dann

$$\int_B e^{x^2} d(x,y) = \int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$$

aber leider $\int_y^1 e^{x^2} dx$ ist sehr sehr shwierig zu lösen!($\int e^{x^2} dx$ ist nicht eine einfache Funktion!)

3. Betrachte den Bereich

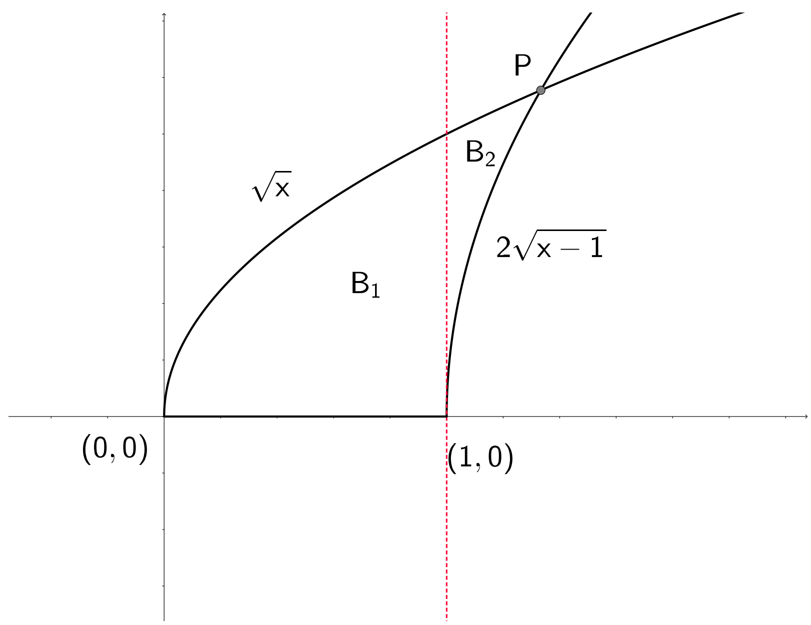
Bitte wenden!



Berechne

$$\int_B xy d(x,y)$$

Lösung. Betrachte



Siehe nächstes Blatt!

Wir berechnen die Koordinaten von P.

$$\sqrt{x} = 2\sqrt{x-1} \text{ genau dann wenn } x = 4(x-1) \text{ genau dann wenn } x = \frac{4}{3}.$$

also $P = (\frac{4}{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$. Dann haben wir

$$B_1 := \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

und

$$B_2 := \left\{(x,y) \mid 1 \le x \le \frac{4}{3},\ 2\sqrt{x-1} \le y \le \sqrt{x}\right\}$$

Also

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} xyd(x,y) &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} xydydx \\
&= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}|_0^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_{B_2} xyd(x,y) &= \int_0^1 \int_{2\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x}} xydydx \\
&= \int_0^1 x\frac{y^2}{2}|_{2\sqrt{x-1}}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2} - \frac{4x(x-1)}{2} dx \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{3x^2}{2} + 2\right) dx \\
&= \left(-\frac{3x^3}{6} + 2x\right)|_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} + 2
\end{aligned}$$

Wir haben

$$\int_B xyd(x,y) = \int_{B_1} xyd(x,y) + \int_{B_2} xyd(x,y) = 2$$

4. Integriere $f(x,y) = \sqrt{1-y^2-x^2}$ über den Kreis $x^2+y^2 \le 1$

Bitte wenden!

a) direkt.

Lösung. Es gilt (aus Serie 1, Aufgabe 2.e))

$$\int \sqrt{a-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a-x^2} + a\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a-x^2}}\right)\right).$$

Also Wir schreiben den Kreis $D_{x,y}$ als $\left\{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1, \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$. Wir haben

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dydx = \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1-y^2-x^2} + \left(1-x^2\right)\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\left(1-x^2\right)\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{0}\right) - \left(1-x^2\right)\arctan\left(\frac{-\sqrt{1-x^2}}{0}\right)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\left(1-x^2\right)\arctan\left(\infty\right) - \left(1-x^2\right)\arctan\left(-\infty\right)\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(\left(1-x^2\right)\frac{\pi}{2} + \left(1-x^2\right)\frac{\pi}{2}\right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(1-x^2\right)\frac{\pi}{2} dx \\
&= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

b) Sei $\Phi(r,\vartheta) := \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta) \end{pmatrix}$ Berechne $J_\Phi(r,\vartheta)$, $\det\left(J_\Phi(r,\vartheta)\right)$.

Lösung

$J_\Phi(r,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$ und $\det\left(J_\Phi(r,\vartheta)\right) = r$

c) Schreibe der Kreis als

$$D_{r,\vartheta} := \{(r,\vartheta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \vartheta \le 2\pi\}$$

und berechne $f\left(\Phi(r,\vartheta)\right)$ explizit.

Lösung

Es gilt $x = r\cos(\vartheta)$ und $y = r\sin(\vartheta)$ also

$$f\left(\Phi(r,\vartheta)\right) = f\left(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)\right) = \sqrt{1 - r^2\sin(\vartheta)^2 - r^2\cos(\vartheta)^2} = \sqrt{1-r^2}$$

Siehe nächstes Blatt!

d) (Optional) Unter Verwendung der Formel

$$\int_{D_{x,y}} f(x,y)d(x,y) = \int_{D_{r,\vartheta}} f(r,\vartheta)\left(\det\left(J_\Phi(r,\vartheta)\right)\right)d(r,\vartheta)$$

Lösung

$$\begin{aligned}\int_{D_{x,y}} f(x,y)d(x,y) &= \int_{D_{r,\vartheta}} f(r,\vartheta)\left(\det\left(J_\Phi(r,\vartheta)\right)\right)d(r,\vartheta)\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{1-r^2}rd\vartheta dr\\ &= \int_0^1 2\pi\sqrt{1-r^2}rdr\\ &= -\frac{2\pi}{3}\sqrt{1-r^2}|_0^1 dr\\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$