Lösung 2

1. Finde eine Stammfunktion von

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^4 \cos(x^5)$

Lösung. Wir haben
$$\big(\sin(x^5)\big)' = 5\cos(x^5)x^4,$$
also die Stammfunktion von $f(x)$ durch
$$F(x) := \frac{\sin(x^5)}{5} + C$$
gegeben ist.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := 2x(1+x^2)\sin\left(\left(1+x^2\right)^2\right)$

Lösung. Wir haben
$$\left(\cos\left(\left(1+x^2\right)^2\right)\right)' = -\sin\left(\left(1+x^2\right)^2\right)\left(\left(1+x^2\right)^2\right)' = -\sin\left(\left(1+x^2\right)^2\right)\left(4\left(1+x^2\right)x\right),$$
also die Stammfunktion von $f(x)$ durch
$$F(x) := -\frac{\cos\left(\left(1+x^2\right)^2\right)}{2} + C$$
gegeben ist.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

Lösung. Wir haben
$$(\operatorname{arcsinh}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Also ist die Stammfunktion
$$F(x) := \operatorname{arcsinh}(e^x)$$

Bitte wenden!

d) $f\ :\ (-\infty, 0) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

Lösung. Wir haben

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Also ist die Stammfunktion

$$F(x) := \arcsin(e^x).$$

e) $f\ :\ \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ f(x) := \dfrac{1}{\tan(x)} + \tan(x)$

Lösung. Wir haben

$$\tan(x)' = 1 + \tan^2(x)$$

und

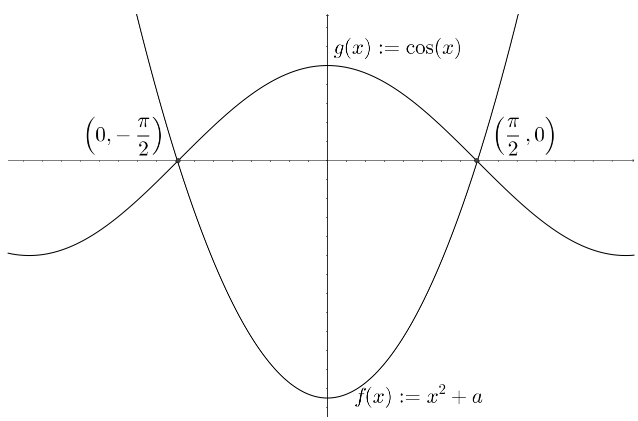
$$\frac{1}{\tan(x)} + \tan(x) = \frac{1+\tan(x)^2}{\tan(x)}.$$

Also ist die Stammfunktion

$$F(x) := \ln(\tan(x)) + C.$$

2. Berechne zunächst die Konstante a und dann den Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

a) Betrachte



Lösung. Es gilt $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, also $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + a = 0$ und $a = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$. Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist

$$F = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\,dx$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir haben

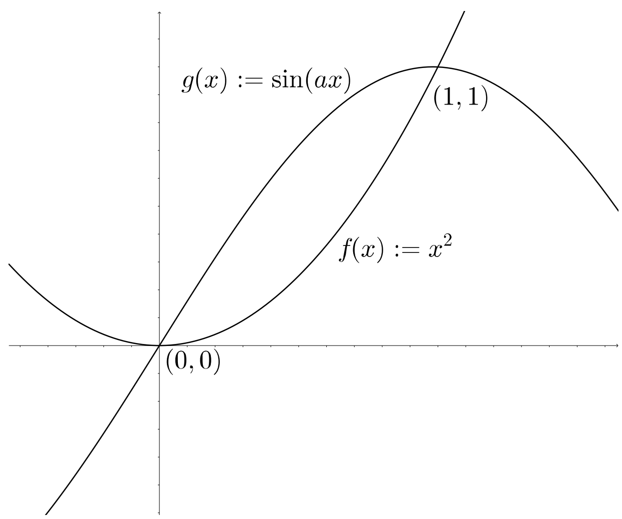
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\,dx = \sin(x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

und

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right) dx &= \frac{1}{3}x^3 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^3}{8}\right) - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\right) \\ &= \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi^3}{4} \\ &= -\frac{\pi^3}{6}\end{aligned}$$

Also $F = 2 + \frac{\pi^3}{6}$.

b) Betrachte



Lösung. Es gilt $g(1) = \sin(a) = 1$, also $a = \frac{\pi}{2}$. Der Inhalt der Fläche zwischen den Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist

$$F = \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx - \int_0^1 x^2\,dx.$$

Wir haben

$$\int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x)\Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

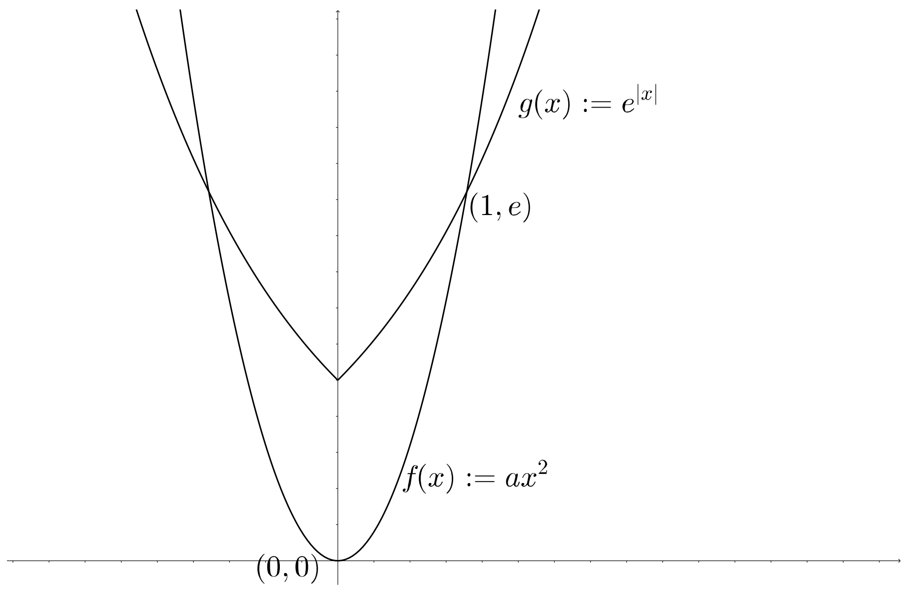
und

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Bitte wenden!

Also $F = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{3}$.

c) Betrachte



Lösung. Es gilt $f(1) = e$, also $a = e$. Wegen Symmetrie haben wir

$$F = 2\left(\int_0^1 e^x\,dx - \int_0^1 ex^2\,dx\right)$$

Wir haben

$$\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$$

und

$$\int_0^1 ex^2 = \frac{e}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{e}{3}$$

Also $F = 2\left(e - 1 - \frac{1}{3}e\right) = \frac{4e}{3} - 2$.

3. Berechne die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\cos(x)\,dx, \qquad n \in \mathbb{N}$

Lösung. Substituiere $\sin(x) = y \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{\cos(x)}$, ersetze die x-Grenzen durch die y-Grenzen $\sin(0) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und erhalte

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\cos(x)\,dx = \int_0^1 y^n \cos(x)\frac{dy}{\cos(x)} = \frac{1}{n+1}y^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) $\displaystyle\int_0^1 e^{3x-e^x}\,dx$

Lösung. Substituiere $e^x = y \Rightarrow dx = \dfrac{dy}{e^x}$, ersetze die x-Grenzen durch die y-Grenzen $e^0 = 1$, $e^1 = e$ und erhalte mit partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{3x-e^x}\,dx = \int_1^e y^2e^{-y}\,dy &= -e^{-y}y^2\Big|_1^e + 2\int_1^e ye^{-y}\,dy\\ &= (-e^{-y}y^2 - 2ye^{-y})\Big|_1^e + 2\int_1^e e^{-y}\,dy\\ &= -e^{-y}(y^2+2y+2)\Big|_1^e\\ &= \frac{5}{e} - e^{-e}(e^2+2e+2).\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin^2(x)\,dx$

Lösung.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin^2(x)\,dx &= -e^{-x}\sin^2(x)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^{-x}2\sin(x)\cos(x)\,dx\\ &= -e^{-x}\sin^2(x)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin(2x)\,dx\\ &= (-e^{-x}\sin^2(x)) - e^{-x}\sin(2x))\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos(2x)\,dx\\ &= (-e^{-x}\sin^2(x)) - e^{-x}\sin(2x))\Big|_0^{\pi/2} + 2\int_0^{\pi/2} e^{-x}(1-2\sin^2(x))\,dx\\ &= (-e^{-x}\sin^2(x)) - e^{-x}\sin(2x))\Big|_0^{\pi/2}\\ &\quad + 2\int_0^{\pi/2} e^{-x}\,dx - 4\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin^2(x)\,dx\\ \Leftrightarrow \quad 5\int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin^2(x)\,dx &= (-e^{-x}\sin^2(x)) - e^{-x}\sin(2x) - 2e^{-x})\Big|_0^{\pi/2}\\ \Leftrightarrow \quad \int_0^{\pi/2} e^{-x}\sin^2(x)\,dx &= -\frac{e^{-x}}{5}(\sin^2(x)) + \sin(2x) + 2)\Big|_0^{\pi/2}\\ &= \frac{2}{5} - \frac{3e^{-\pi/2}}{5}.\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx$

Bitte wenden!

Lösung. Mit der trigonometrischen Umformumg

$$\frac{1}{1+\cos(x)} = \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{d}{dx}\tan(\tfrac{x}{2})$$

erhält man sofort

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{d}{dx}\tan(\tfrac{x}{2})\,dx = \tan(\tfrac{x}{2})\Big|_0^{\pi/2} = \tan(\tfrac{\pi}{4}) - \tan(0) = 1.$$

Das selbe Ergebnis erhält man mit der Substitution
$y = \tan(\frac{x}{2}) \Rightarrow dx = 2\cos^2(\frac{x}{2})dy$. Die Grenzen ändern sich zu $\tan(0) = 0$, $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ und somit ist

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(x)}\,dx = \int_0^{1} \frac{2\cos^2(\frac{x}{2})}{1+\cos(x)}\,dy = \int_0^{1} \frac{2\cos^2(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\,dy = \int_0^1 1\,dy = y\Big|_0^1 = 1.$$

4. Multiple choiche

1. $t \mapsto \cos t\, \ln t + c$ ist für jede Konstante $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von

$$t \mapsto \frac{\cos t}{t} - \sin t\, \ln t.$$

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Mit der Produktregel folgt $\frac{d}{dt}(\cos t\, \ln t + c) = -\sin t\, \ln t + \frac{\cos t}{t} + 0$.

2. $t \mapsto \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}$ ist eine Stammfunktion von $t \mapsto \cos^2 t$.

√ (a) Richtig.

(b) Falsch.

Es gilt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(2\cos^2 t - 1\right) + \frac{1}{2} = \cos^2 t.$$

Siehe nächstes Blatt!

3. Es ist

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \sin^2 x + c, \qquad \text{aber auch}$$
$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int \sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c,$$

also $\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos(2x)$.

(a) Richtig.

√ (b) Falsch.

Es gelten

$$\frac{d}{dt}\left(\sin^2 x + c\right) = 2\sin x\,\cos x + 0 \qquad \text{und}$$
$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) + c\right) = -\frac{1}{2}(-2\sin(2x)) + 0 = 2\sin x\,\cos x,$$

also unterscheiden sich die beiden Funktionen nur um eine Konstante. Es ist aber

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\cos(2x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1) = \sin^2 x + \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Was auch einfach zu sehen ist, wenn man die Funktionen an der Stelle 0 auswertet:

$$\sin^2(0) = 0 \neq -\frac{1}{2}\cos(0) = -\frac{1}{2}.$$