Lösung 3

1. Berechne für die folgenden Funktionen das Taylorpolynom n-ten Grades um den Punkt a:

Lösung. Wir verwenden für alle Aufgaben die Taylorformel um den Punkt a in folgender Notation:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

wobei a der Entwicklungspunkt ist.

a) $\cos(x)$, $n = 5$, $a = 0$
Lösung.

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) &=& \cos(x) & \Rightarrow & f(0) &=& 1 \\
f^{(1)}(x) &=& -\sin(x) & \Rightarrow & f^{(1)}(0) &=& 0 \\
f^{(2)}(x) &=& -\cos(x) & \Rightarrow & f^{(2)}(0) &=& -1 \\
f^{(3)}(x) &=& \sin(x) & \Rightarrow & f^{(3)}(0) &=& 0 \\
f^{(4)}(x) &=& \cos(x) & \Rightarrow & f^{(4)}(0) &=& 1 \\
f^{(5)}(x) &=& -\sin(x) & \Rightarrow & f^{(5)}(0) &=& 0
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad T_5(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

b) $\tan(x)$, $n = 4$, $a = \frac{\pi}{4}$
Lösung.

$$\begin{array}{rclcrcl}
f(x) &=& \tan(x) & \Rightarrow & f\left(\frac{\pi}{4}\right) &=& 1 \\
f^{(1)}(x) &=& 1 + \tan^2(x) & \Rightarrow & f^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &=& 2 \\
f^{(2)}(x) &=& 2\tan(x) + 2\tan^3(x) & \Rightarrow & f^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &=& 4 \\
f^{(3)}(x) &=& 2 + 8\tan^2(x) + 6\tan^4(x) & \Rightarrow & f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &=& 16 \\
f^{(4)}(x) &=& 16\tan(x) + 40\tan^3(x) + 24\tan^5(x) & \Rightarrow & f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) &=& 80
\end{array}$$

$$\Rightarrow \quad T_4(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4$$

Bitte wenden!

c) $\ln(1+x)$, $n=4$, $a=1$
Lösung.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \ln(1+x) \\ f^{(1)}(x) & = & \frac{1}{1+x} \\ f^{(2)}(x) & = & -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f^{(3)}(x) & = & \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) & = & -\frac{6}{(1+x)^4} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f(1) & = & \ln(2) \\ f^{(1)}(1) & = & \frac{1}{2} \\ f^{(2)}(1) & = & -\frac{1}{4} \\ f^{(3)}(1) & = & \frac{1}{4} \\ f^{(4)}(1) & = & -\frac{3}{8} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad T_4(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{24}(x-1)^3 - \frac{1}{64}(x-1)^4$$

d) $\sqrt{1+x}$, $n=3$, $a=1$
Lösung.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (1+x)^{1/2} \\ f^{(1)}(x) & = & \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\ f^{(2)}(x) & = & -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2} \\ f^{(3)}(x) & = & \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{rcl} f(1) & = & \sqrt{2} \\ f^{(1)}(1) & = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ f^{(2)}(1) & = & -\frac{1}{8\sqrt{2}} \\ f^{(3)}(1) & = & \frac{3}{32\sqrt{2}} \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad T_3(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-1) - \frac{1}{16\sqrt{2}}(x-1)^2 + \frac{1}{64\sqrt{2}}(x-1)^3$$

2. Berechne die Partialbruchzerlegungen von:

a) $\dfrac{5x+12}{x^2+5x+6}$

Lösung. Der Nenner zerfällt in zwei Linearfaktoren, so dass

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad 5x+12 &= A(x+3) + B(x+2) \\ &= (A+B)x + 3A + 2B \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} A+B=5 & \Leftrightarrow & A = 5-B \\ 3A+2B=12 & \Rightarrow & B=3,\ A=2. \end{array}$$

Und somit

$$\frac{5x+12}{x^2+5x+6} = \frac{2}{2+x} + \frac{3}{x+3}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) $\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2-x^3}$

Lösung. Der Nenner zerfällt in einen linearen und einen quadratischen Faktor, so dass

$$\frac{2x^2+3x-2}{x^2-x^3} = \frac{2x^2+3x-2}{x^2(1-x)} = \frac{Ax+B}{x^2} + \frac{C}{1-x}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad 2x^2+3x-2 &= (Ax+B)(1-x)+Cx^2 \\ &= (C-A)x^2+(A-B)x+B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C-A=2 &\quad \Leftrightarrow \quad C=2+A \\ A-B=3 &\quad \Rightarrow \quad A=3+B \\ B=-2 &\quad \Rightarrow \quad A=1,\ C=3. \end{aligned}$$

Und somit

$$\frac{2x^2+3x-2}{x^2-x^3} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{1-x}.$$

Bitte wenden!

c) $\dfrac{-2x^2+7x-5}{2x-3}$

Lösung. Der Grad des Zählers ist höher als der des Nenners, also führen wir zuerst die Polynomdivision durch:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & (-2x^2 & + & 7x & - & 5) & :(2x-3) \;\Big|\; -x+2 \\
- & (-2x^2 & + & 3x) & & & \\
\hline
 & & & 4x & - & 5) & \\
 & & - & (4x & - & 6) & \\
\hline
 & & & & & 1 &
\end{array}
$$

Damit ergibt sich

$$\frac{-2x^2+7x-5}{2x-3} = -x+2+\frac{1}{2x-3}.$$

d) $\dfrac{1}{1+x^3}$

Lösung. Die reelle Faktorisierung des Ausdrucks ist

$$1+x^3 = (1+x)(1-x+x^2)$$

und führt auf den Ansatz

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{(1+x)(1-x+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{(1-x+x^2)}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad 1 &= A(1-x+x^2)+(Bx+C)(1+x) \\
&= (A+B)x^2+(B-A+C)x+A+C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A+B=0 &\quad\Leftrightarrow\quad B=-A \\
B-A+C=0 &\quad\Rightarrow\quad C=2A \\
A+C=1 &\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Somit ergibt sich

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{2-x}{1-x+x^2}\right).$$

3. Berechne die folgenden Integrale:

Siehe nächstes Blatt!

a) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{1-x+x^2}\,dx$

Lösung. Es ist

$$\frac{d}{dx}(1-x+x^2) = 2x-1,$$

und wir können die Formel

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \log(|\varphi(x)|)$$

verwenden. Somit ist

$$\int \frac{2x-1}{1-x+x^2}\,dx = \log(|1-x+x^2|) + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x+x^2}\,dx$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1-x+x^2}\,dx &= \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du && (u := x-\tfrac{1}{2},\ du = dx) \\
&= \int \frac{1}{\frac{3}{4}(\frac{4}{3}u^2+1)}\,du \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{w^2+1}\,dw && (w := \tfrac{2}{\sqrt{3}},\ du = \tfrac{\sqrt{3}}{2}dw) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(w) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}}u\right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.
\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\frac{1}{1+x^3}$

Lösung. Aus Aufgabe 2d

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{2-x}{1-x+x^2}\right).$$

Bitte wenden!

Also

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x^3}\,dx &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{1-x+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\log(|1+x|) + \frac{1}{3}\int \frac{2-x}{1-x+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\log(|1+x|) - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{1-x+x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x+x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\log(|1+x|) - \frac{1}{6}\log(|1-x+x^2|) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\tfrac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Resultate aus **a)** und **b)** verwendet haben.

4. Multiple choiche

1. Seien f, g zwei Funktionen, $a, b \in \mathbb{R}$. Die Substitutionsformel ist

$$\int_a^b f\left(g(s)\right) g'(s)\,ds = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt,$$

wobei $g(s) = t$. Betrachte

$$\int_1^3 4s\cos(2s^2)\,ds = \int_2^{18} \cos(t)\,dt$$

Was ist $g(s)$?

(a) $g(s) = s^2$.

(b) $g(s) = \sqrt{s}$.

$\checkmark$ (c) $g(s) = 2s^2$.

(d) $g(s) = 2\sqrt{s}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Betrachte das Integral $\int_1^{10} \frac{1}{1+\ln(t)}\,dt$. Substituiere $s = \ln(t)$. Welches Integral ist das korrekte Ergebnis?

(a) $\int_0^{10} \frac{1}{1+s}\,ds$.

✓ (b) $\int_0^{\ln(10)} \frac{e^s}{1+s}\,ds$.

Es Gilt $g(s) = e^s$

$$\int_1^{10} \frac{1}{1+\ln(t)}\,dt = \int_0^{\ln(10)} \frac{e^s}{1+s}\,ds$$

(c) $\int_1^{\ln(10)} \frac{e^s}{1+s} ds$.

3. Betrachte das Integral $\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$. Substituiere $g(s) = \cos(s) = t$. Welches Integral ist das korrekte Ergebnis?

(a) $\int_0^1 \cos(s)\,ds$.

(b) $\int_0^{\pi/2} -\cos(s)\,ds$.

✓ (c) $\int_0^{\pi/2} \cos(s)\,ds$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt &= \int_{\mathrm{arcos}(0)}^{\mathrm{arcos}(1)} -\frac{\cos(s)^2}{\sqrt{1-\cos(s)^2}}\sin(s)\,ds \\ &= \int_{\pi/2}^{0} -\cos(s)\,ds \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos(s)\,ds\end{aligned}$$