Lösung 4

1. Sei $f(x) := \sqrt{x}$.

a) Berechne die Taylorreihe von $f(x)$ bei $a = 1$.

Lösung. Wir haben

$$\sqrt{x}' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{x}'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}, \quad \sqrt{x}''' = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}$$

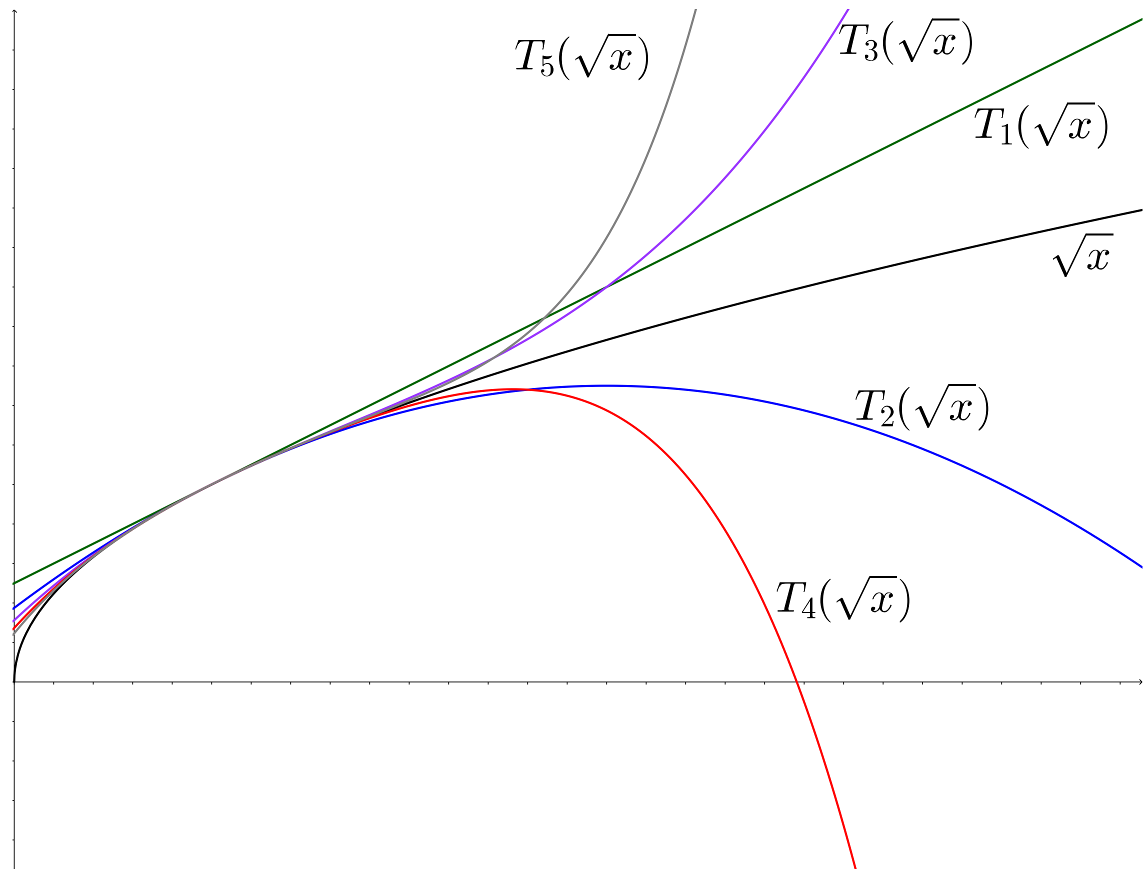
Die Taylorreihe bei $a = 1$ ist die Binomialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (x-1)^n$$

b) Plotte die ersten fünf Taylorpolynome.

Lösung. Wir haben

$$T_5\left(f(x)\right) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5$$



c) Welche Konvergenzradius hat die Taylorreihe von $f(x)$ bei $a = 1$?

Lösung. Über das Quotientenkriterium erhalten wir:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{\frac{1}{2}}{n}}{\binom{\frac{1}{2}}{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{\frac{1}{2} - (n+1)} \right| = 1$$

2. Berechne für die folgenden Funktionen das Taylorpolynom n-ten Grades um den Punkt a:

a) $e^{\sin(x)}$, $n = 4$, $a = 0$

Lösung. Wir haben

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Siehe nächstes Blatt!

Also $e^{\sin(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(x-\frac{x^3}{3!}+\dots\right)^k}{k!}$. Wir schreiben

$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^1}{1} = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$
$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + \dots$$
$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^3}{6} = \frac{x^3}{6} + \dots$$
$$\frac{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)^4}{24} = \frac{x^4}{24} + \dots$$

Wir schliessen

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \dots$$

b) $\frac{1}{1+x+x^2}$, $n = 4$, $a = -\frac{1}{2}$

Lösung.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x+x^2} &= \frac{1}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + x + x^2} \\
&= \frac{1}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{4}{3}}{1 + \frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\frac{4}{3}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^2}
\end{aligned}$$

Wir haben $\frac{1}{(1+x)} = \frac{1}{1-(-(x))} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x)^k$. Also

$$\frac{\frac{4}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2\right)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)^{2k}$$

c) $\tan^2(x)$, $n = 6$, $a = 0$

Lösung. Wir haben

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots,$$

Bitte wenden!

also

$$\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots\right)\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\dots\right)=x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+\dots$$

d) $\frac{1}{1+\tan^2(x)}$, $n=6$, $a=0$

Lösung. Wir haben $\frac{1}{(1+x)}=\frac{1}{1-(-(x))}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(x)^k$. Also

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+\tan^2(x))}&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\tan^2(x)\right)^k\\&=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(x^2+\frac{2x^4}{3}+\frac{17x^6}{45}+\dots\right)^k\\&=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2x^6}{45}+\end{aligned}$$

e) $\sin(x^{27})$, $n=28$, $a=0$

Lösung. Wir haben

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\,!}$$

also

$$\sin(x^{27})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{27(2k+1)}}{(2k+1)\,!}=x^{27}+\dots$$

3. Betrachte Die Taylorreihe von $\sin(x)$. Nach Lagrange ist $R_7(\sin(x))\leq\frac{x^8}{8!}$. Für wie grosse x kann man garantieren dass

$$|\sin(x)-T_7\sin(x)|<\frac{1}{100}$$

Lösung. Nach Langrange ist

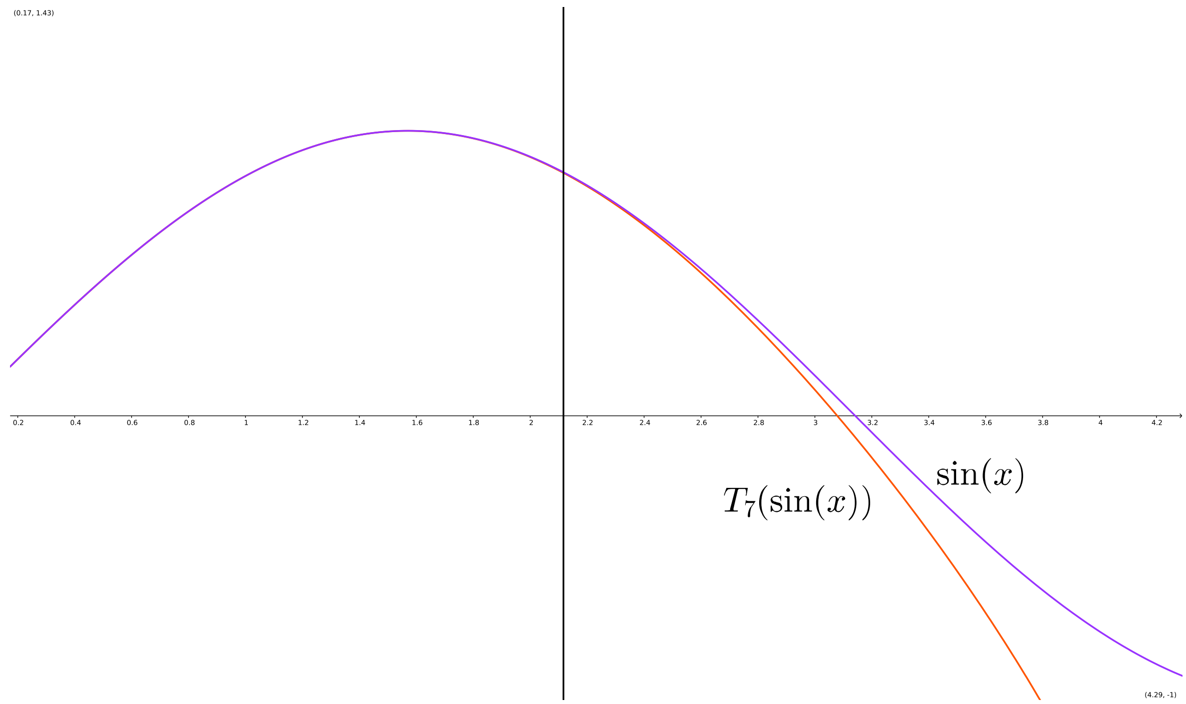
$$R_n(x)=\frac{\sin^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

für ein $\xi\in[0,x]$. Es gilt $|\sin(x)|<1$, also

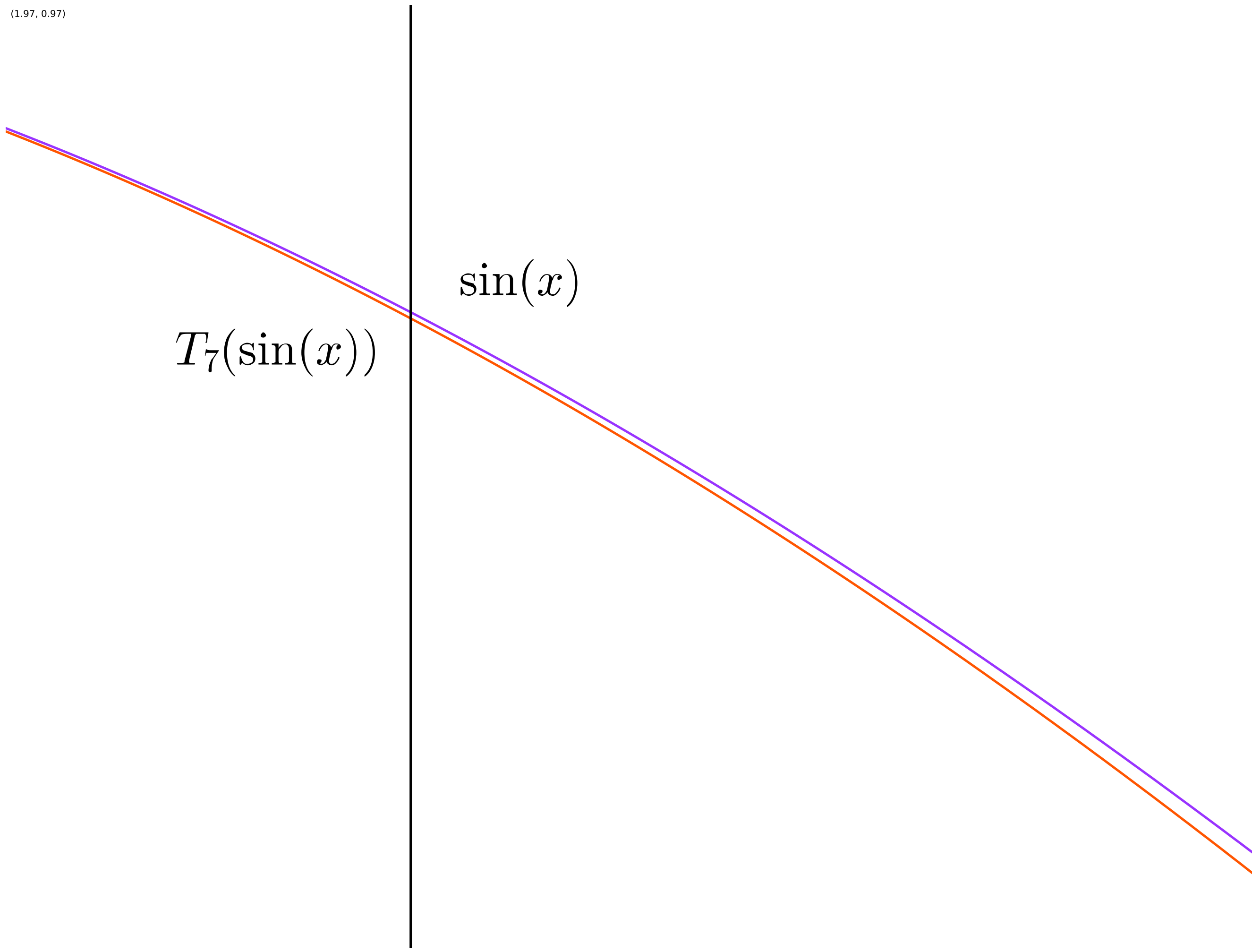
$$|\sin(x)-T_7\sin(x)|=|R_7(\sin(x))|<\left|\frac{x^8}{8!}\right|.$$

Es gilt $\left|\frac{x^8}{8!}\right|<\frac{1}{100}$ genau dann $|x|<\left(\frac{8!}{100}\right)^{1/8}=2.11684....$ Hier ein Graph

Siehe nächstes Blatt!



Bitte wenden!



(1.97, 0.97)
$\sin(x)$
$T_7(\sin(x))$