Lösung 5

1. Sei $\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung der Zykloide. Bestimme die Länge direkt via Bogenlängenintegral.

Lösung. Wir haben $\left|\left|\dot{\gamma(t)}\right|\right|^2 = (1 - \cos(t))^2 + \sin(t)^2 = 2 - 2\cos(t) = 4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$. Also

$$s(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} dt = \int_0^{2\pi} 2\sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 4\int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = 8$$

2. Betrachte den Weg, der auf dem EinheitsKreis im Uhrzeigersinn von -1 nach 1 geht.

a) Bestimme die Länge via Bogenlängenintegral des Funktionsgraphen $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$,

Lösung. Wir haben $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, also

$$\begin{aligned} L(f) &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\arccos(x)|_{-1}^{1} = \pi \end{aligned}$$

b) Direktes parametrisieren.

Lösung. Wir haben $\gamma(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, $t \in [0, \pi]$. Also $\left|\left|\dot{\gamma(t)}\right|\right|^2 = 1$ und

$$\int_0^{\pi} 1 = \pi$$

3. Eine Astroide ist definiert durch $\alpha(t) = \left(A\cos^3(t), B\sin^3(t)\right)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Bitte wenden!

a) Rollt ein Kreis mit radius $\frac{r}{4}$ innen auf einem Kreis mit Radius r ab, so beschreibt ein fester Randpunkt des kleineren Kreises eine gleichseitige Astroide ($A = B$).

Lösung. Betrachte zuerst das Bild bei
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Astroid2.gif.
Sei $\gamma(t)$ die gesuchte Parametrisierung. Aus dem Bild folgt dass $\gamma(0) = (0, r)$, $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (r, 0)$, $\gamma(pi) = (0, -r)$ und $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, -r)$. Sei $\beta(t) = \big(\frac{3r}{4}\cos(t), \frac{3r}{4}\sin(t)\big)$ die Parametrisierung der Kreis mit Radius $\frac{3r}{4}$ und sei $\beta'(t) = \big(\frac{r}{4}\cos(t), \frac{r}{4}\sin(t)\big)$ die Parametrisierung der Kreis mit Radius $\frac{r}{4}$. Sei (p_1, p_2) in Punkt der Astroid. Aus dem Bild folgt dass

$$(p_1, p_2) = \left(\frac{3r}{4}\cos(\psi) + \frac{r}{4}\cos(\vartheta), \frac{3r}{4}\sin(\psi) + \frac{r}{4}\cos(\vartheta)\right)$$

für $\psi, \vartheta \in [0, 2\varphi]$. Die Punkte auf der kleiner Kreis bewegen im Gegenuhrzeit Sinne. Also die Parametrisierung hat die Form

$$\gamma(t) = \left(\frac{3r}{4}\cos(t) + \frac{r}{4}\cos(\lambda t), \frac{3r}{4}\sin(t) - \frac{r}{4}\sin(\lambda t)\right)$$

für ein $\lambda > 0$. Aber $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (r, 0)$, also $\lambda = 3$ und

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(\frac{3r}{4}\cos(t) + \frac{r}{4}\cos(3t), \frac{3r}{4}\sin(t) - \frac{r}{4}\sin(3t)\right) \\
&= \left(\frac{3r}{4}\cos(t) + \cos^3(t) - \frac{3r}{4}\cos(t), \frac{3r}{4}\sin(t) - \frac{3r}{4}\sin(3t) + \frac{r}{\sin}^{3}(t)\right) \\
&= \big(r\cos^3(t), r\sin^3(t)\big)
\end{aligned}$$

b) Berechne Umfang und Inhalt einer gleichseitige Astroide.

Lösung. $\dot{\gamma(t)} = \big(-3r\sin(t)\cos^2(t), 3r\cos(t)\sin^2(t)\big)$. Also

$$\left|\left|\dot{\gamma(t)}\right|\right|^2 = 9r^2\sin^2(t)\cos^2(t).$$

Wir haben

$$s(\gamma) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3r\sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{12r\sin^2(t)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6r$$

Siehe nächstes Blatt!

Wir setzen $x = r\cos^3(t)$. Dann

$$\begin{aligned}
y = r\sin^3(t) &= r\left(\sin^2(t)\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= r\left(1-\cos^2(t)\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= r\left(1-\frac{(\cos^3(t)r)^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(r^{\frac{2}{3}}-\left(r\cos^3(t)\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(r^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Die Flache Inhalt ist gegeben durch

$$4\int_0^{-1}\left(r^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

Wir substituiren mit $x = r\cos^3(u)$, dann $dx = -3r\cos^2(u)\sin(u)du$. Es folgt

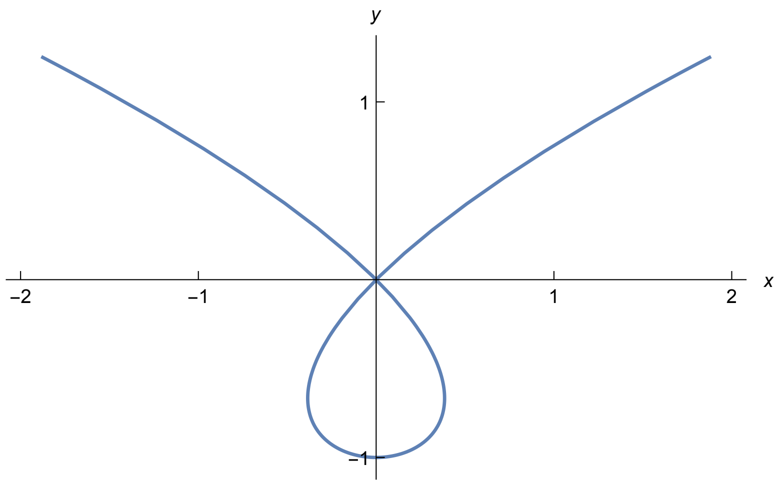
$$\begin{aligned}
4\int_0^{-1}\left(r^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\,dx &= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -3r^2\sin^4(u)\cos^2(u)\,du \\
&= 12r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(u)\cos^2(u)\,du \\
&= 12r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\sin(u)\cos(u))^2}{4}\frac{2\sin^2(u)}{2}\,du \\
&= \frac{3}{2}r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin(u)\cos(u))^2 2\sin^2(u)\,du \\
&= \frac{3}{2}r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2u)\left(1-\cos(2u)\right)\,du \\
&= \frac{3}{2}r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2u)-\sin^2(2u)\cos(2u)\,du \\
&= \frac{3}{2}r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(4u)}{2}\,du - \frac{3}{4}r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2(2u)\cos(2u)\,du \\
&= \frac{3}{2}r^2\left(\frac{u}{2}-\frac{\sin(4u)}{4}-\frac{1}{6}\sin^3(2u)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi r^2}{8}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

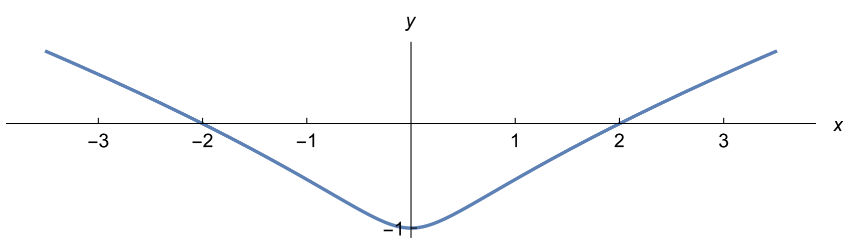
Inhalt via Sektorformel.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\dot{y} - y\dot{x}\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3r^2\left(\sin^4(t)\cos^2(t) + \cos^4(t)\sin^2(t)\right)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3r^2\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt \\ &= \frac{3r^2}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2(2t)\,dt = \frac{3\pi r^2}{8}\end{aligned}$$

4. Multiple choiche Betrachte die folgenden zwei Spuren von Wegen:



Weg 1



Weg 2

Siehe nächstes Blatt!

1. Welche der beiden Spuren wird durch $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$ parametrisiert?

√ (a) Weg 1

(b) Weg 2

(c) weder noch

2. Welche der beiden wird durch $\gamma(t) = (t^3 - t, t^2 + 1)$ parametrisiert?

(a) Weg 1

(b) Weg 2

√ (c) weder noch

3. Welche der beiden wird durch $\gamma(t) = (t^3 + t, t^2 - 1)$ parametrisiert?

(a) Weg 1

√ (b) Weg 2

(c) weder noch

4. Sei $v(x, y)$ ein Vektorfeld mit Niveaulinien

(a) $v(x, y) = (1, 1)$

(b) $v(x, y) = (x, 1)$

√ (c) $v(x, y) = (1, y)$