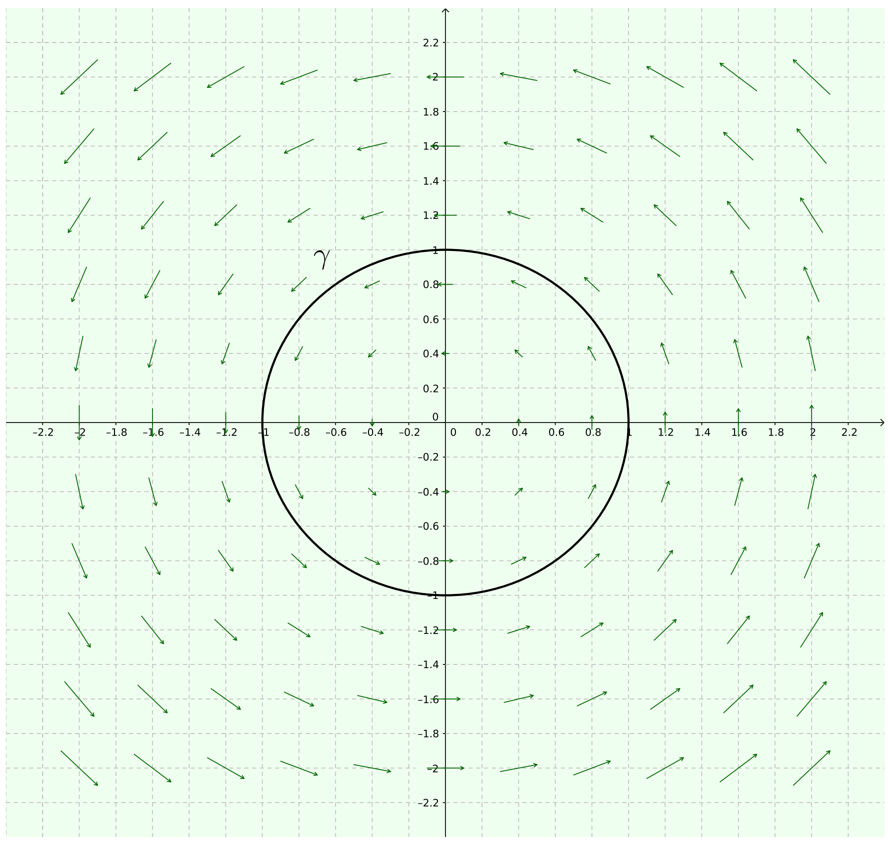
D-CHAB Grundlagen der Mathematik I (Analysis B) FS 2016
Theo Bühler

Lösung 6

1. Seien $V(x,y) := (-y,x)$, $W(x,y) = (x,-y)$ zwei Vektorfelder.

a) Zeichne und finde $\gamma(t)$ so dass $\dot{\gamma(t)} = V(\gamma(t))$,

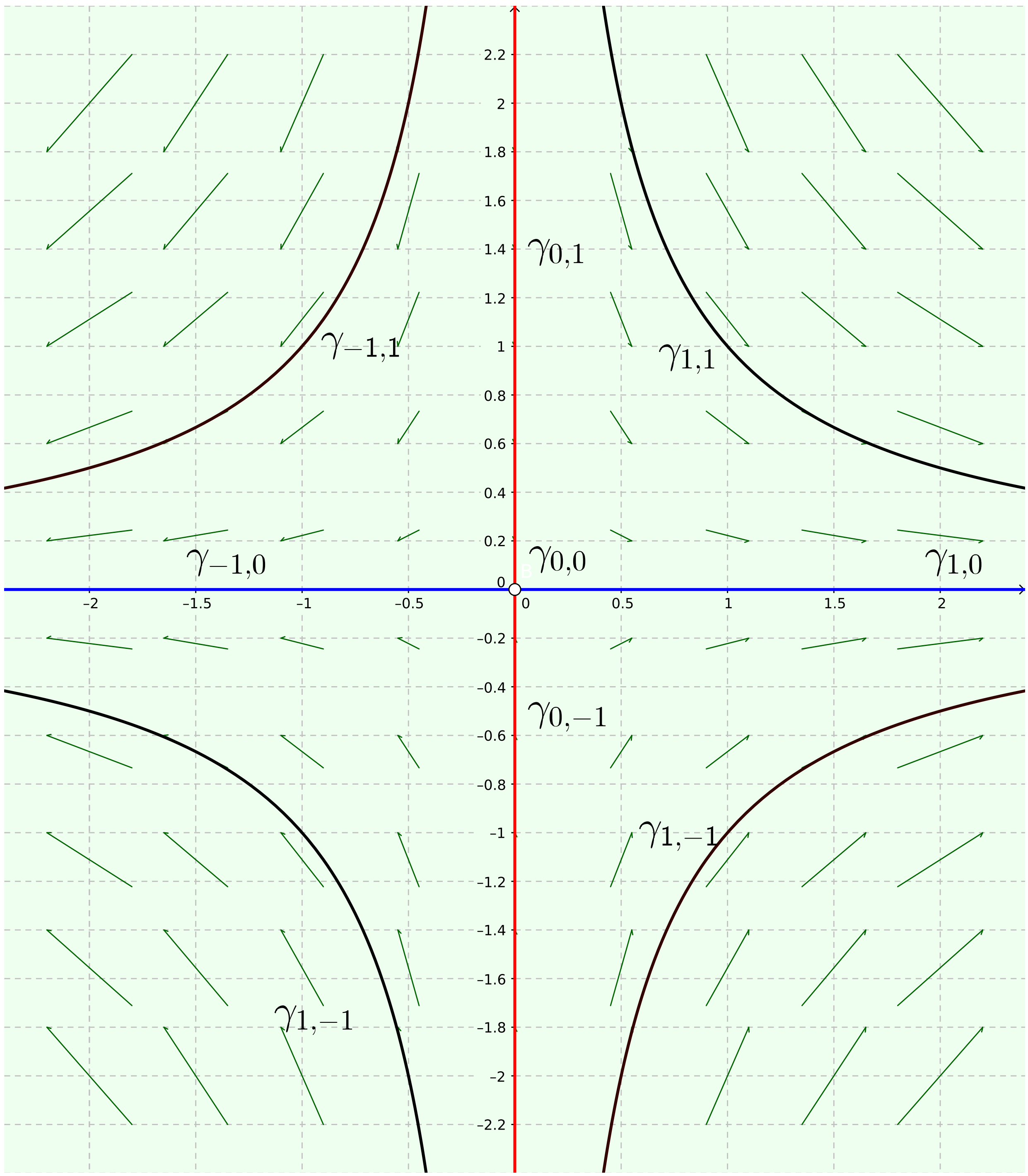
Lösung. Betchrachte das Bild



Hier $\gamma(t) = (C\cos(t), C\sin(t))$ für $c \in \mathbb{R}$ (oben ist $C = 1$).

b) Zeichne und finde $\gamma(t)$ so dass $\dot{\gamma(t)} = W(\gamma(t))$. Betchrachte das Bild

Bitte wenden!



Hier $\gamma_{C,D}(t) := (Ce^t, De^{-t}) \,:\, (0,\infty) \to \mathbb{R}$ für $C, D \in \mathbb{R}$.

Siehe nächstes Blatt!

2. Eine Kurve sei in Polarkoordinaten durch

$$\gamma(r(\varphi), \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

gegeben.

a) Setzte $t = \varphi$ und schreibe $\gamma(t)$ in kartesischen Koordinaten

$$\gamma(t) := (x(t), y(t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Lösung. Die Koordinaten der punkt P sind $p = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$. Also $\gamma(t) := (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$

b) Sei S die obige Fläche mit Inhalt $F(S)$. Verifiziere die Polarform der *Leibnizschen Sektorformel*

$$F(S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r(\varphi)^2 \, d\varphi.$$

Lösung. Mit Hilfe der Sektorformel kriegen wir

$$\begin{aligned}
F(S) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right) \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r(t)\cos(t)r(t)\cos(t) - (r(t)\sin(t)\left(-r(t)\sin(t)\right))\right) \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(t))^2 \left(\cos^2(t) + \sin^2(t)\right) \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(t))^2 \, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (r(\varphi))^2 \, d\varphi
\end{aligned}$$

3. Seien A und B zwei Punkte in der Ebene mit Abstand $|A - B| = 2d > 0$. Die *Lemniskate* L ist die Menge aller Punkte P, für welche

$$|P - A| \cdot |P - B| = d^2$$

gilt.

Bitte wenden!

a) Skizziere L.

Lösung. Ein Punkt, der sicherlich zu L gehört, ist der Mittelpunkt von A und B, denn $M = \frac{1}{2}(A + B)$ erfüllt $|B - M| = d = |A - M|$.

Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit M als Koordinatenursprung und x-Achse auf der Verbindungsgeraden von A nach B. Wir können also $A = (-d, 0)$ und $B = (d, 0)$ annehmen.

Quadrieren wir die Bedingung $|P - A| \cdot |P - B| = d^2$, so erhalten wir für einen Punkt $P = (x, y)$ auf der Lemniskate, dass

$$\left((x + d)^2 + y^2\right)\left((x - d)^2 + y^2\right) = d^4$$

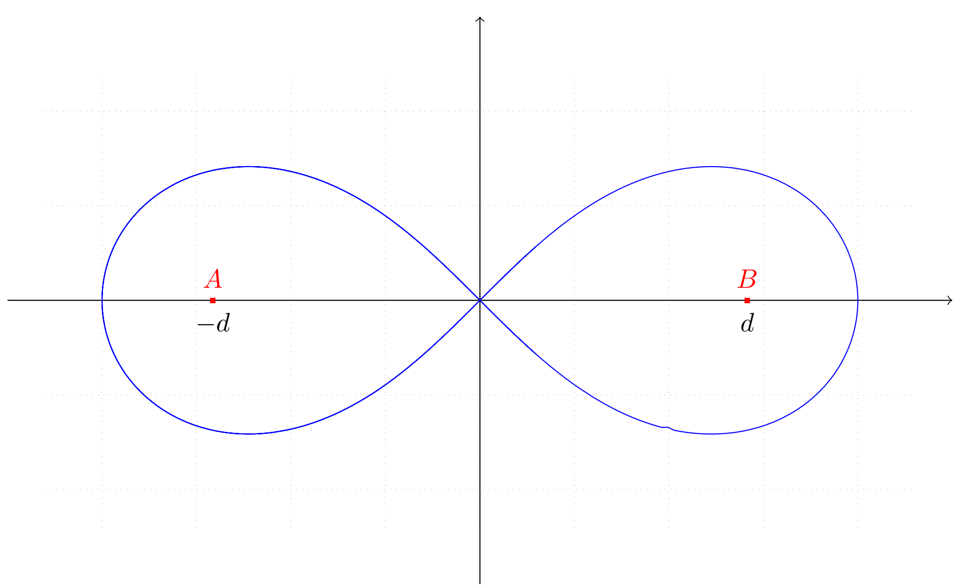
gelten muss. Ausmultiplizieren und umformen führt zu der Bedingung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0$$

Aus dieser Formel sieht man, dass mit (x, y) auch $(-x, y)$, $(x, -y)$, $(-x, -y)$ zur Lemniskate gehören. Die Lemniskate ist also spiegelsymmetrisch bezüglich der x-Achse und der y-Achse.

Bestimmen wir die Punkte $(x, 0)$ auf der x-Achse, die zur Lemniskate gehören: Die Bedingung wird zu $x^2(x^2 - 2d^2) = 0$ vereinfacht, also $x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}d$.

Der einzige Punkt auf der y-Achse, der zur Lemniskate gehört, ist $(0, 0)$, denn die Bedingung wird zu $y^4 + 2d^2y^2 = 0$, was nur die reelle Lösung $y = 0$ hat.



Siehe nächstes Blatt!

Will man die Lemniskate explizit als Funktionsgraphen darstellen, so kann man zunächst die Bedingung als biquadratische Gleichung in y darstellen

$$y^4 + 2(x^2 + d^2)y^2 + x^2(x^2 - 2d^2) = 0$$

und wir finden mit Hilfe der Lösungsformel für quadratische Gleichungen zunächst

$$y^2 = -x^2 - d^2 \pm d\sqrt{4x^2 + d^2}.$$

Da wir nur an *reellen* y interessiert sind, erhalten wir die zwei Graphen

$$y = \pm\sqrt{-x^2 - d^2 + d\sqrt{4x^2 + d^2}}, \quad -\sqrt{2}d \leq x \leq \sqrt{2}d.$$

b) Finde eine Gleichung der Form $r = f(\varphi)$, so dass eine Schleife der Lemniskate in Polarkoordinaten mit Mittelpunkt $\frac{A+B}{2}$ als Koordinatenursprung durch

$$\{(r, \varphi) \,|\, r = f(\varphi)\}$$

gegeben ist.

Lösung. Setzen wir $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ in die Bedingung

$$(x^2 + y^2)^2 - 2d^2(x^2 - y^2) = 0$$

ein, so erhalten wir

$$0 = r^4 - 2d^2r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = r^2(r^2 - 2d^2\cos(2\varphi))$$

mit $r > 0$ führt dies zu

$$r^2 = 2d^2\cos(2\varphi), \qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

oder

$$r = d\sqrt{2\cos(2\varphi)}, \qquad -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}.$$

c) Verwende die Leibnizsche Sektorformel, um die von L eingeschlossene Fläche zu bestimmen.

Lösung. Die Fläche einer Schleife ist nach der Leibnizschen Sektorformel durch

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\varphi)^2 \,\mathrm{d}\varphi = d^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = d^2$$

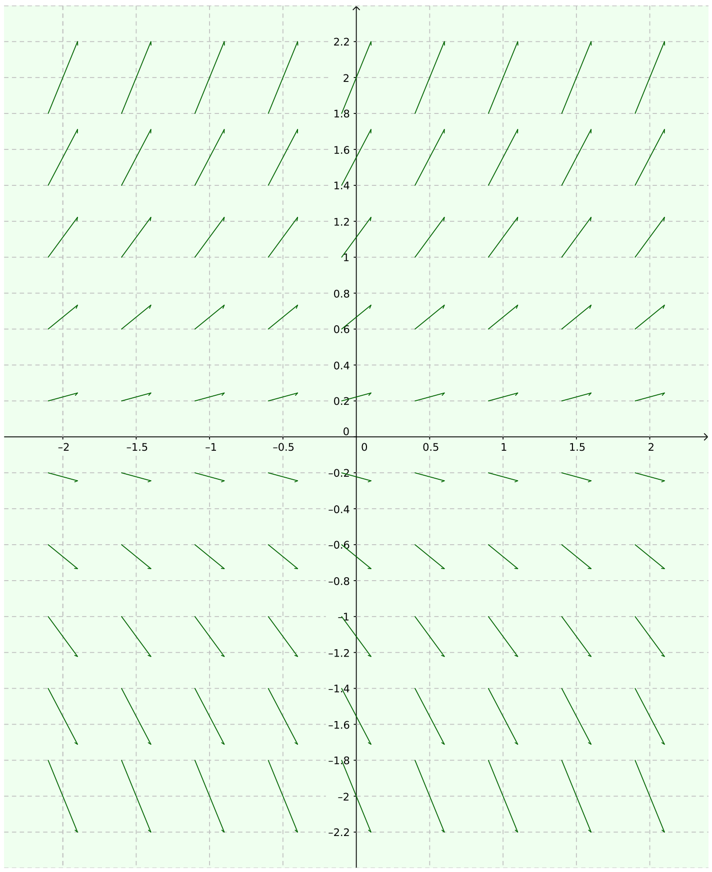
gegeben. Die insgesamt von L eingeschlossene Fläche ist demnach

$$2F = 2d^2.$$

4. Multiple choiche

Bitte wenden!

1. Welches Vektorfeld $V(x,y)$ ist hier abgebildet?



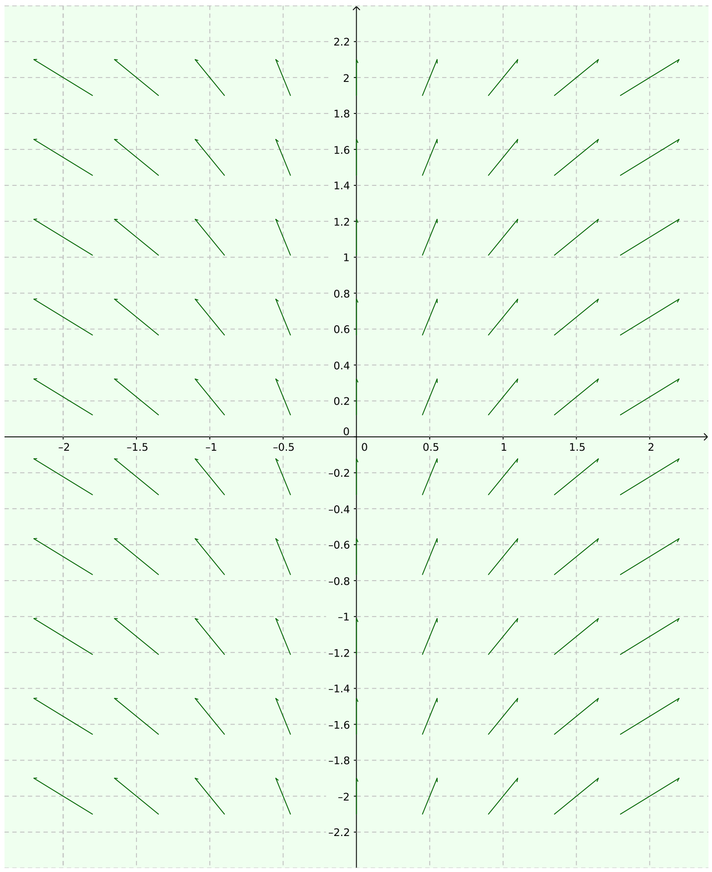
(a) $V(x,y) = (1,1)$

(b) $V(x,y) = (x,1)$

$\surd$ (c) $V(x,y) = (1,y)$

Siehe nächstes Blatt!

2. Welches Vektorfeld $V(x,y)$ ist hier abgebildet?



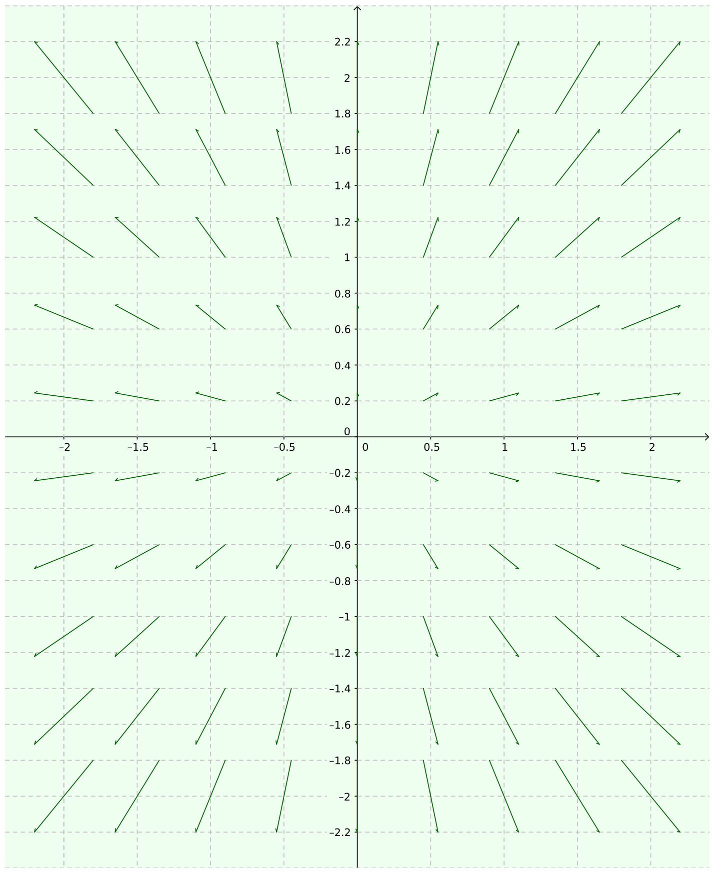
(a) $V(x,y) = (y,x)$

(b) $V(x,y) = (1,x)$

√ (c) $V(x,y) = (x,1)$

Bitte wenden!

3. Welches Vektorfeld $V(x, y)$ ist hier abgebildet?



√ (a) $V(x, y) = (x, y)$

(b) $V(x, y) = (y, x)$

(c) $V(x, y) = (x, x)$