Lösung 7

Die Aufgaben dieser Serie sind enthalten in Königsberger, *Analysis 1*, Kapitel 13.7-13.8.

1. *Polarkoordinatendarstellung von Ellipse, Hyperbel und Parabel.* Die *Leitlinie* l sei eine Gerade parallel zur y-Achse und der *Brennpunkt* F sei ein Punkt auf der x-Achse. Die *Exzentrizität* ist eine feste Zahl $\varepsilon > 0$. Für einen Punkt P in der Ebene bezeichne r den Abstand zu F und d den Abstand zu l.

Gesucht ist der geometrische Ort C aller Punkte P, deren Abstände zu F und l im Verhältnis

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

stehen.

a) Sei $p > 0$ der Abstand zwischen l und F. Es gilt $d = p + r\cos\varphi$. Zeige, dass

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

gilt.

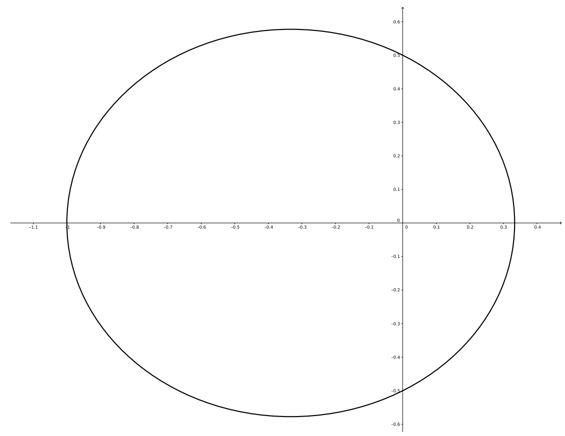
Lösung.

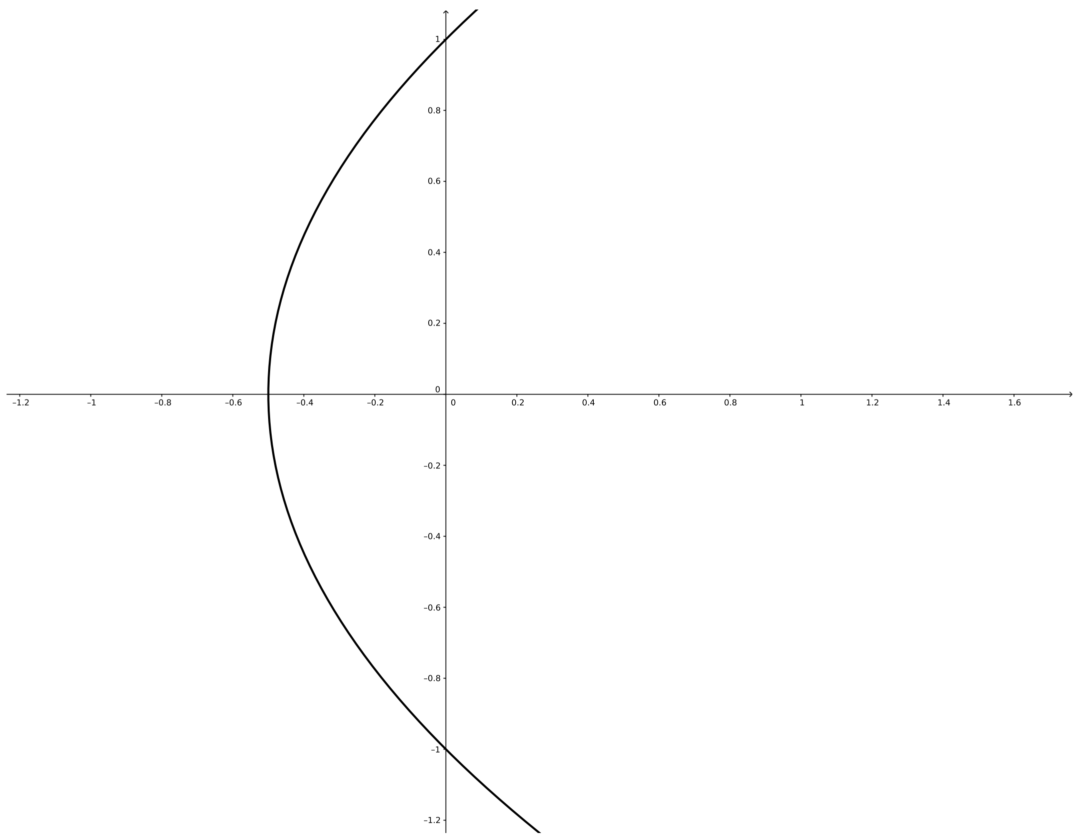
$$\varepsilon = \frac{r}{d} = \frac{r}{p + r\cos\varphi}$$

Also

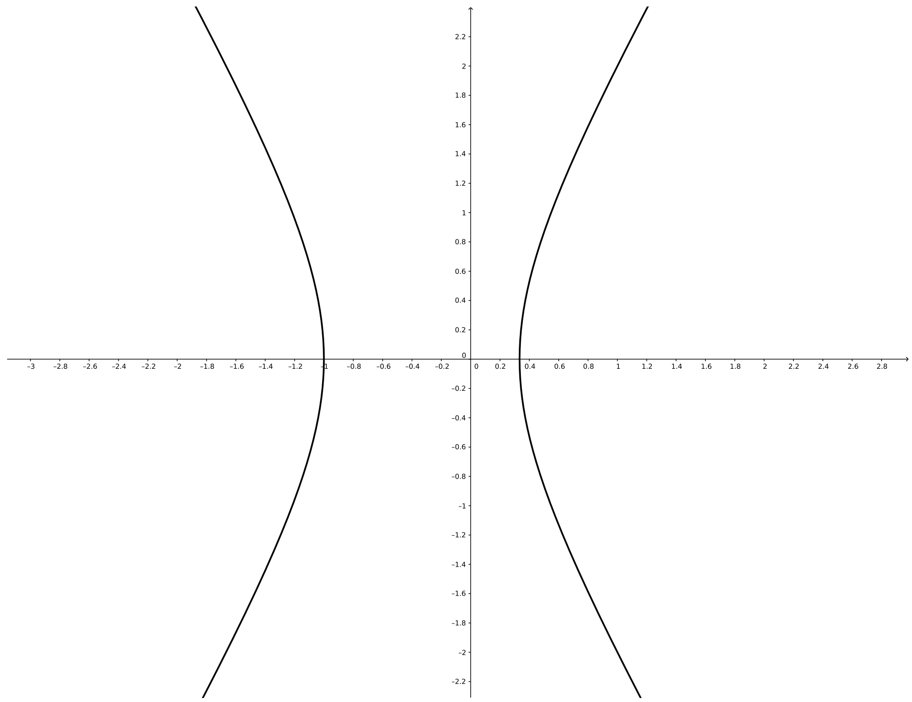
$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

b) Die Kurve $(r(\varphi), \varphi)$ in Polarkoordinaten ist für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, für $\varepsilon < 1$ eine Ellipse und für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel. Plotte diese für $p = 1$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}, 1, 2$.





Siehe nächstes Blatt!



2. Wie in der Vorlesung betrachten wir den Ort $x(t)$ eines Planeten der Masse m, der sich im Gravitationsfeld der Sonne mit Masse M bewegt. Wir wissen, dass der Drehimpuls und der Achsenvektor

$$J = x \times (m\dot{x}) \qquad A = \frac{J \times \dot{x}}{GMm} + \frac{x}{|x|}$$

konstant sind und dass sich der Planet in der Ebene E senkrecht zu J bewegt. Wir wählen das Koordinatensystem mit der Sonne im Ursprung, $e_1 \parallel A$, e_2 und $e_3 \parallel J$. In diesem Koordinatensystem gilt $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ und $J = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{pmatrix}$ mit $j = m(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2)$.

a) Mit Hilfe von $(a \times b) \cdot c = \det(a, b, c)$ verifiziere, dass

$$A \cdot x = -\frac{j^2}{GMm^2} + |x|.$$

Lösung. Wir haben

$$\det(J, \dot{x}, x) = \begin{pmatrix} 0 & \dot{x}_1(t) & x_1(t) \\ 0 & \dot{x}_2(t) & x_2(t) \\ j & 0 & 0 \end{pmatrix} = -jx_1\dot{x}_2 + j\dot{x}_1x_2 = -j\,(x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1x_2) = -\frac{j^2}{m}$$

Bitte wenden!

Also

$$A \cdot x = \left(\frac{J \times \dot{x}}{GMm} + \frac{x}{|x|} \right) \cdot x = \frac{\det(J, \dot{x}, x)}{GMm^2} + |x| = -\frac{j^2}{GMm^2} + |x|$$

b) Sei $\varphi(t)$ der Winkel zwischen A und $x(t)$. Mit $|A| = \varepsilon$ gilt dann

$$A \cdot x = \varepsilon |x| \cos(\varphi(t)).$$

Sei $r := |x|$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$r = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \qquad \text{wobei} \qquad p = \frac{j^2}{GMm^2 \varepsilon}.$$

Lösung. Wir haben

$$\varepsilon |x| \cos(\varphi(t)) = A \cdot x = -\frac{j^2}{GMm^2} + |x|$$

Also

$$\varepsilon r \cos(\varphi(t)) = -\frac{j^2}{GMm^2} + r$$

und

$$r = \frac{\frac{j^2}{GMm^2}}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$$

3. Wir setzen $\xi = r \cos \varphi$ und $\eta = r \sin \varphi$.

a) Dann gilt wegen $\varepsilon^2 = \frac{r^2}{d^2}$ die Gleichung

$$\xi^2 (1 - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2 p \xi + \eta^2 = \varepsilon^2 p^2.$$

Lösung. Es gilt

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 = \varepsilon^2 d^2$$

$d = p + \xi$, also folgt

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2 = \varepsilon^2 d^2 = \varepsilon^2 (p + \xi)^2$$

Also

$$\xi^2 (1 - \varepsilon^2) - 2\varepsilon^2 p \xi + \eta^2 = \varepsilon^2 p^2.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Im Fall $\varepsilon = 1$ setze $x = \xi + \dfrac{p}{2}$ und $y = \eta$. Dann gilt $y^2 = 2px$.

Lösung. Wir haben

$$\begin{aligned} y^2 &= 2px \\ \eta^2 &= 2p\left(\xi + \frac{p}{2}\right) \\ \eta^2 &= 2p\xi + p^2 \\ \eta^2 &= 2p\xi + p^2 \\ -2p\xi + \eta^2 &= p^2 \\ \xi^2(1-\varepsilon^2) - 2\varepsilon^2 p\xi + \eta^2 &= \varepsilon^2 p^2, \text{ mit } \varepsilon = 1. \end{aligned}$$

c) Im Fall $\varepsilon < 1$ setze $x = \xi - \dfrac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ sowie $a = \dfrac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}$ und $b = \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Es gilt dann

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Lösung.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\xi - \frac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{\xi^2 - \frac{2\xi p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{p^2\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{\xi^2 - \frac{2\xi p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{p^2\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}} + \frac{\eta^2}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(1-\varepsilon^2)}} &= 1 \\ \frac{\xi^2\left(\varepsilon^2-1\right)^2}{\varepsilon^2 p^2} + \frac{2\xi\left(\varepsilon^2-1\right)}{p} + \varepsilon^2 + \eta^2\frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 \\ \frac{\xi^2\left(\varepsilon^2-1\right)^2}{\varepsilon^2 p^2} + \frac{2\xi\left(\varepsilon^2-1\right)}{p} + \eta^2\frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 - \varepsilon^2 \\ \frac{\xi^2\left(1-\varepsilon^2\right)}{\varepsilon^2 p^2} - \frac{2\xi}{p} + \frac{\eta^2}{\varepsilon^2 p^2} &= 1 \\ \xi^2(1-\varepsilon^2) - 2\varepsilon^2 p\xi + \eta^2 &= \varepsilon^2 p^2 \end{aligned}$$

d) Im Fall $\varepsilon > 1$ setze $x = \xi - \dfrac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}$ sowie $a = \dfrac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$ und $b = \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$. Es

Bitte wenden!

gilt dann

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lösung.

$$\frac{\left(\xi - \frac{p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right)^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\xi^2 - \frac{2\xi p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{p^2\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{\xi^2 - \frac{2\xi p\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{p^2\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2-1)^2}} - \frac{\eta^2}{\frac{\varepsilon^2 p^2}{(\varepsilon^2-1)}} = 1$$

$$\frac{\xi^2(\varepsilon^2-1)^2}{\varepsilon^2 p^2} - \frac{2\xi(\varepsilon^2-1)}{p} + \varepsilon^2 - \eta^2\frac{(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon^2 p^2} = 1$$

$$\frac{\xi^2(\varepsilon^2-1)^2}{\varepsilon^2 p^2} - \frac{2\xi(\varepsilon^2-1)}{p} + \eta^2\frac{(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} = 1-\varepsilon^2$$

$$\frac{\xi^2(1-\varepsilon^2)}{\varepsilon^2 p^2} - \frac{2\xi}{p} + \frac{\eta^2}{\varepsilon^2 p^2} = 1$$

$$\xi^2(1-\varepsilon^2) - 2\varepsilon^2 p\xi + \eta^2 = \varepsilon^2 p^2$$

4. Die Keplerschen Gesetze:

a) Der Planet bewegt sich auf einer Ellipse, einer Parabel oder einer Hyperbel und die Sonne befindet sich in einem Brennpunkt.

Lösung. Aus Aufgabe 2 wissen wir dass sich der Planet in der Ebene E senkrecht zu J bewegt. Man kann x via $(r(\varphi(t))\cos(\varphi(t)), r(\varphi(t))\sin(\varphi(t)))$ parametrisieren, wobei

$$r(\varphi(t)) = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos(\varphi(t))}$$

mit $p = \frac{j^2}{GMm^2\varepsilon}$ $|A| = \varepsilon$, und die Koordinaten der Sonne sind $(0,0)$. Sei C die Spur von x. Wir habe zwei mögliche Leitlinien l: $(-p,t)$ entweder (p,t). Im beide Fälle, die punkte von C erfüllen

$$\frac{r}{d} = \varepsilon$$

Siehe nächstes Blatt!

Also aus Aufgabe 3, schliessen wir dass C eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel ist.

b) Der Fahrstrahl r überstreicht in der Zeit T die Fläche $F(T) = \frac{j}{2m}T$.

Lösung. Das wurde in der Vorlesung gezeigt (Leibniz Sektorformel).

c) Bewegt sich der Planet auf einer Ellipsenbahn, so ist das Quadrat der Umlaufzeit proportional zur dritten Potenz der grossen Achse.

Hinweis: Die Ellipsenfläche ist πab. Bestimme damit die Umlaufzeit T und zeige $\frac{T^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM}$.

Lösung. Sei T der Umlaufzeit. Also aus dem zweitem Keplerschem Gesetz

$$\frac{1}{2}\left|\int_{t_1}^{t_2} (x_1\dot{x}_2 - \dot{x}_1 x_2)\, dt\right| = \frac{|j|}{2m}T$$

Aber das ist die Fläche der Ellipse. Andererseits,

$$\frac{|j|}{2m}(T) = \pi ab$$

wobei $a = \dfrac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}$ und $b = \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Wir haben $ab = a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$. Also

$$T^2 = \left(\frac{\pi ab}{\frac{|j|}{2m}}\right)^2 = 4\pi^2\frac{m^2}{|j|^2}a^4\left(1-\varepsilon^2\right) = 4\pi^2\frac{m^2}{|j|^2}a^3\left(1-\varepsilon^2\right)$$

Wir haben

$$T^2 = 4\pi^2\frac{m^2}{|j|^2}a^4\left(1-\varepsilon^2\right) = 4\pi^2\frac{m^2}{|j|^2}a^3\frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2-1}\left(\varepsilon^2-1\right) = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}$$