Lösung 8

1. Bestimme alle reellen Lösungen der Gleichung

$$\ddot{u}(t) + u(t) = q$$

für

a) $q = t^m, \qquad m = 0, 1, 2, 3$

Lösung. Für die homogene Gleichung $\ddot{u}(t) + u(t) = 0$ machen wir den Ansatz $u_h(t) = e^{\lambda t}$ und erhalten das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Die reelle homogene Lösung ist somit

$$u_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Für die inhomogene Gleichung machen wir den Ansatz

$$\begin{aligned}
u_i(t) &= \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \\
\dot{u}_i(t) &= \sum_{k=1}^{m} k a_k t^{k-1} \\
\ddot{u}_i(t) &= \sum_{k=2}^{m} k(k-1) a_k t^{k-2} = \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich liefern

$$\begin{aligned}
t^m &= \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)(k+2) a_{k+2} t^k + \sum_{k=0}^{m} a_k t^k \\
&= \sum_{k=0}^{m-2} ((k+1)(k+2) a_{k+2} + a_k) t^k + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m \\
\Rightarrow \quad & a_m = 1, \quad a_{m-1} = 0, \quad a_k = -(k+1)(k+2) a_{k+2}.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

Die inhomogene Lösung ist somit

$$\begin{aligned} u_i(t) &= t^m - \sum_{k=0}^{m-2}(k+1)(k+2)a_{k+2}t^k \\ &= t^m - m(m-1)t^{m-2} + m(m-1)(m-2)(m-3)t^{m-4} - \dots \end{aligned}$$

Die reelle Lösung der Differentialgleichung ist

$$u(t) = u_h(t)+u_i(t) = A\cos(t)+B\sin(t)+t^m-m(m-1)t^{m-2}+m(m-1)(m-2)(m-3)t^{m-4}-\dots.$$

Für $m = 0, 1, 2, 3$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &\mathbf{m=0}: \quad u_i(t) = a_0 = 1, \\ \Rightarrow\quad & u(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + 1 \\ &\mathbf{m=1}: \quad u_i(t) = a_0 + a_1 t \quad a_1 = 1, \quad a_0 = 0 \\ \Rightarrow\quad & u(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + t \\ &\mathbf{m=2}: \quad u_i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_0 = -2 \\ \Rightarrow\quad & u(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + t^2 - 2 \\ &\mathbf{m=3}: \quad u_i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad a_3 = 1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -6, \quad a_0 = 0 \\ \Rightarrow\quad & u(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + t^3 - 6t. \end{aligned}$$

b) $q = \sinh(t)$

Lösung. Mit $\sinh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ haben wir den Fall $\mu = \pm 1$, was keine Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ sind. Also machen wir den Ansatz

$$u_i(t) = \frac{b_0}{\chi(\mu)} e^{\mu t}.$$

Setzen wir $\mu = \pm 1$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{i1}(t) &= \frac{1}{2(1^2+1)} e^t = \frac{1}{4} e^t \\ u_{i2}(t) &= -\frac{1}{2((-1)^2+1)} e^{-t} = -\frac{1}{4} e^{-t}. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_i(t) = u_{i1}(t) + u_{i2}(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2}\sinh(t)$$

Somit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$u(t) = u_h(t) + u_i(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \frac{1}{2}\sinh(t).$$

Siehe nächstes Blatt!

2. Löse folgendes Anfangswertproblem

$$m\ddot{x}(t) = mg - k\dot{x}(t), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

(Die Lösung beschreibt das Fallen eines Körpers bei einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibung.)

Lösung. Für die homogene Gleichung $m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) = 0$ machen wir den Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$. Und somit

$$m\lambda^2 + k\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\tfrac{k}{m}.$$

Die reelle homogene Lösung ist also

$$x_h(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t}, \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

Für die inhomogene Lösung machen wir den Ansatz

$$x_i(t) = a_0 t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = a_0, \quad \ddot{x}(t) = 0.$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$m \cdot 0 + ka_0 = mg \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad x_i(t) = \frac{mg}{k}t.$$

Die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = x_h(t) + x_i(t) = A + Be^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t.$$

Die Konstanten lassen sich nun aus den Anfangsbedingungen bestimmen:

$$\begin{aligned}
x(0) = 0 = A + B \quad &\Leftrightarrow \quad A = -B \\
\dot{x}(t) = -B\frac{k}{m}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}& \\
\dot{x}(0) = 0 = -B\frac{k}{m} + \frac{mg}{k} \quad &\Leftrightarrow \quad B = \frac{m^2 g}{k^2} \\
\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{m^2 g}{k^2} + \frac{m^2 g}{k^2}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}t.&
\end{aligned}$$

3. Die Bewegungsgleichungen des *Foucaultschen Pendels* lauten

$$\begin{aligned}
\ddot{x}(t) &= 2u\dot{y}(t) - \gamma x(t) \\
\ddot{y}(t) &= -2u\dot{x}(t) - \gamma y(t),
\end{aligned}$$

mit $\gamma = g/l$, g Erdbeschleunigung, l Pendellänge, u eine von der geographischen Breite abhängige reelle Konstante, x, y erdfeste kartesische Koordinaten in Nord-Süd- bzw. West-Ost-Richtung.

Bitte wenden!

a) Fasse die Gleichungen zu *einer* Differentialgleichung 2. Ordnung für $z(t) = x(t) + iy(t)$ zusammen und berechne die Lösung mit $z(0) = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\dot{z}(0) = 0$.

Lösung. Mit $z(t) = x(t) + iy(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\ddot{z}(t) &= \ddot{x}(t) + i\ddot{y}(t)\\ &= 2u\dot{y}(t) - \gamma x(t) + i(-2u\dot{x}(t) - \gamma y(t))\\ &= 2u\dot{y}(t) - \gamma x(t) - 2iu\dot{x}(t) - i\gamma y(t))\\ &= -\gamma(x(t) + iy(t)) - 2iu(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))\\ &= -\gamma z(t) - 2iu\dot{z}(t),\end{aligned}$$

also eine homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Mit dem Ansatz $z(t) = e^{\lambda t}$ erhalten wir

$$\lambda^2 + 2iu\lambda + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2iu \pm \sqrt{-4u^2 - 4\gamma}}{2} = -iu \pm i\sqrt{u^2 + \gamma}$$

und somit die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}z(t) &= Ae^{it(-u+\sqrt{u^2+\gamma})} + Be^{-it(u+\sqrt{u^2+\gamma})}\\ &= e^{-itu}(Ae^{it\sqrt{u^2+\gamma}} + Be^{-it\sqrt{u^2+\gamma}}), \qquad A, B \in \mathbb{C}\end{aligned}$$

Mit den Anfangsbedingungen lassen sich nun die Konstanten bestimmen:

$$\begin{aligned}z(0) &= A + B = a \quad \Leftrightarrow \quad B = a - A\\ \dot{z}(t) &= e^{-itu}(iAe^{it\sqrt{u^2+\gamma}}(-u + \sqrt{u^2+\gamma}) - iBe^{-it(u+\sqrt{u^2+\gamma})}(u + \sqrt{u^2+\gamma}))\\ \dot{z}(0) &= iA(-u + \sqrt{u^2+\gamma}) - iB(u + \sqrt{u^2+\gamma})\\ &= iA(-u + \sqrt{u^2+\gamma}) - i(a - A)(u + \sqrt{u^2+\gamma})\\ &= 2iA\sqrt{u^2+\gamma} - ia(u + \sqrt{u^2+\gamma}) = 0\\ &\Leftrightarrow \quad A = \frac{a}{2} + \frac{au}{2\sqrt{u^2+\gamma}} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right),\\ &\qquad\ \ B = \frac{a}{2} - \frac{au}{2\sqrt{u^2+\gamma}} = \frac{a}{2}\left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right).\end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$z(t) = \frac{a}{2}e^{-itu}\left(\left(1 + \frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{it\sqrt{u^2+\gamma}} + \left(1 - \frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{-it\sqrt{u^2+\gamma}}\right).$$

Siehe nächstes Blatt!

b) Man berechne Ort und Geschwindigkeit des Pendelkörpers zu den Zeitpunkten $T/2$ und T mit $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{u^2+\gamma}}$.

Lösung. Mit

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= -\frac{iau}{2}e^{-itu}\left(\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{it\sqrt{u^2+\gamma}} + \left(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{-it\sqrt{u^2+\gamma}}\right) \\
&\quad + \frac{ia}{2}\sqrt{u^2+\gamma}e^{-itu}\left(\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{it\sqrt{u^2+\gamma}} - \left(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{-it\sqrt{u^2+\gamma}}\right) \\
&= \frac{ia\gamma}{\sqrt{u^2+\gamma}}e^{-itu}\left(e^{it\sqrt{u^2+\gamma}} - e^{-it\sqrt{u^2+\gamma}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z\left(\tfrac{T}{2}\right) &= z\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right) \\
&= \frac{a}{2}e^{-\frac{i\pi u}{\sqrt{u^2+\gamma}}}\left(\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{i\pi} + \left(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{-i\pi}\right) \\
&= -ae^{-\frac{i\pi u}{\sqrt{u^2+\gamma}}} \\
\dot{z}\left(\tfrac{T}{2}\right) &= \dot{z}\left(\tfrac{\pi}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right) \\
&= \frac{ia\gamma}{\sqrt{u^2+\gamma}}e^{-\frac{i\pi u}{\sqrt{u^2+\gamma}}}\left(e^{i\pi} - e^{-i\pi}\right) \\
&= 0 \\
\left|\dot{z}\left(\tfrac{T}{2}\right)\right| &= 0 \\
z(T) &= z\left(\tfrac{2\pi}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right) \\
&= \frac{a}{2}e^{-\frac{2\pi i u}{\sqrt{u^2+\gamma}}}\left(\left(1+\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{2\pi i} + \left(1-\frac{u}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right)e^{-2\pi i}\right) \\
&= ae^{-\frac{2\pi i u}{\sqrt{u^2+\gamma}}} \\
\dot{z}(T) &= \dot{z}\left(\tfrac{2\pi}{\sqrt{u^2+\gamma}}\right) \\
&= \frac{ia\gamma}{\sqrt{u^2+\gamma}}e^{-\frac{2\pi i u}{\sqrt{u^2+\gamma}}}\left(e^{2\pi i} - e^{-2\pi i}\right) \\
&= 0 \\
|\dot{z}(T)| &= 0.
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

4. Multiple Choice. In den folgenden Fragen geht es um die lineare Differentialgleichung

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 = b \tag{L}$$

mit Inhomogenität $b \neq 0$ und die zugehörige homogene Gleichung

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 = 0. \tag{H}$$

Entscheide, welche der folgenden Aussagen korrekt sind.

1. Die Lösungen von (L) bilden einen n-dimensionalen komplexen Vektorraum.

(a) Wahr

Nein, ein Vektorraum enthält immer die 0. Die Funktion $u = 0$ löst jedoch die Gleichung (L) nicht, da $b \neq 0$ ist.

√ (b) Falsch

2. Die Lösungen von (H) bilden einen n-dimensionalen komplexen Vektorraum.

√ (a) Wahr

(b) Falsch

3. Sind u_1 und u_2 Lösungen von (L), so ist $u_1 - u_2$ auch eine Lösung von (L).

(a) Wahr

√ (b) Falsch

4. Sind u_1 und u_2 Lösungen von (L), so ist $u_1 - u_2$ auch eine Lösung von (H).

√ (a) Wahr

(b) Falsch