Lösung 9

1. Löse für $x > 0$ folgende Anfangswertprobleme:

a) $\begin{cases} xu'(x) = u(x) \\ u(1) = 1 \end{cases}$

Lösung.
Die Lösung der Gleichung erhalten wir mit Separation,

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \ln u = \ln x + c,$$

$$u(x) = Cx.$$

und mit

$$u(1) = 1 = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 1$$

finden wir schliesslich die Lösung des Anfangswertproblems:

$$u(x) = x.$$

b) $\begin{cases} u'(x) = -xu(x) \\ u(0) = 3 \end{cases}$

Lösung.
Mit Hilfe von Separation

$$\frac{du}{dx} = -xu \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{du}{u} = -\int x\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \ln(u) = -\frac{1}{2}x^2 + c$$

erhalten wir für die Lösung der Gleichung

$$u(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

und mit

$$u(0) = 3 = C \quad \Leftrightarrow \quad C = 3$$

finden wir schliesslich die Lösung des Anfangswertproblems:

$$u(x) = 3e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Bitte wenden!

2. Finde die reellen Lösungen der folgenden inhomogenen Differentialgleichungen:

a) $u'''(t) - u'(t) = t^2$,

Homogene Lösung.

Betrachte

$$u'''(t) - u'(t) = q(t)$$

Die homogene Gleichung

$$u'''(t) - u'(t) = 0$$

lässt sich mit dem Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$ lösen. Das charakteristische Polynom ist in diesem Fall

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - \lambda = \lambda(\lambda^2 - 1)$$

und hat die Nullstellen

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Also ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$u_h(t) = A + Be^t + Ce^{-t}, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Die Inhomogenitäten t^2 e^t sind alle von der Form

$$q(t) = (c_0 + c_1 t + \cdots + c_m t^m)e^{\mu t}, \quad c_i \in \mathbb{R}.$$

Die partikulären Lösungen in diesen Fällen sind also

$$u_p(t) = \begin{cases} (d_0 + d_1 t + \cdots + d_m t^m)e^{\mu t}, & \mu \text{ ist keine Nullstelle von } \chi \\ (d_0 + d_1 t + \cdots + d_m t^m)t^k e^{\mu t}, & \mu \text{ ist } k\text{-fache Nullstelle von } \chi \end{cases}, \quad d_i \in \mathbb{R}$$

Hier $q(t) = t^2$ und sind $m = 2$, $c_0 = c_1 = 0$, $c_2 = 1$ und $\mu = 0$, wobei 0 eine einfache Nullstelle von χ ist. Somit ist die partikuläre Lösung von der Form

$$u_p(t) = (d_0 + d_1 t + d_2 t^2)t = d_0 t + d_1 t^2 + d_2 t^3.$$

Um die Koeffizienten zu bestimmen setzen wir nun $u_p(t)$ in die Differentialgleichung ein und vergleichen die Koeffizienten. Mit

$$u_p'(t) = d_0 + 2d_1 t + 3d_2 t^2, \quad u_p''(t) = 2d_1 + 6d_2 t, \quad \text{und} \quad u_p'''(t) = 6d_2$$

erhalten wir

$$u_p'''(t) - u_p'(t) = 6d_2 - d_0 - 2d_1 t - 3d_2 t^2 = t^2$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$d_0 = -2, \quad d_1 = 0 \quad \text{und} \quad d_2 = -\frac{1}{3}.$$

Die partikuläre Lösung ist in diesem Fall $u_p(t) = -\frac{1}{3}t^3 - 2t$ und die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung entsprechend

$$u(t) = A + Be^t + Ce^{-t} - \frac{1}{3}t^3 - 2t, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Siehe nächstes Blatt!

b) $u'''(t) - u'(t) = e^t$,

Lösung. Hier $q(t) = e^t$. Es sind $m = 0$, $c_0 = 1$ und $\mu = 1$, wobei 1 eine einfache Nullstelle von χ ist. Mit

$$\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 1 \quad \text{und} \quad \chi'(1) = 2$$

ist die partikuläre Lösung $u_p(t) = \frac{1}{2}te^t$ und somit ergibt sich für die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u(t) = A + Be^t + Ce^{-t} + \frac{1}{2}te^t, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

c) $u'''(t) - u'(t) = t^2 + e^t$

Lösung. Hier $q(t) = t^2 + e^t$. Mit dem Superpositionsprinzip und den Lösungen aus **c)** und **d)** erhalten wir die partikuläre Lösung

$$u_p(t) = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{3}t^3 - 2t.$$

Also ist die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$u(t) = A + Be^t + Ce^{-t} + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{3}t^3 - 2t, \quad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

d) $\ddot{u}(t) + u(t) = \dfrac{1}{\sin(t)}, \quad t \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Lösung.

Die homogene Gleichung hat das charakteristische Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad \text{mit den Nullstellen} \quad \lambda_{1,2} = \pm i,$$

und somit die Lösung

$$u_h(t) = A\cos(t) + B\sin(t), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Die Funktionen $u_1(t) = \cos(t)$ und $u_2(t) = \sin(t)$ sind linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung. Mit dem Satz von Variation der Konstanten finden wir

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(t)} \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad &\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{1}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sin(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \cot(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Bitte wenden!

$$\Rightarrow \quad f_1(t) = -1, \quad f_2(t) = \cot(t), \quad F_1(t) = -t, \quad F_2(t) = \ln(|\sin(t)|)$$
$$\Rightarrow \quad u_p(t) = -t\cos(t) + \sin(t)\ln(|\sin(t)|).$$

Damit ist die Lösung der Differentialgleichung

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t) - t\cos(t) + \sin(t)\ln(|\sin(t)|).$$

3. Sei $u(x)$ definert durch:

$$\begin{cases} u'(x) = xu(x)^2 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Für welche u_0 ist $u(x)$ auf die ganze $\mathbb{R}$ definiert?
Lösung. Lösung.
F́ur $u_0 = 0$ kriegen wir $u(x) = 0$ als Lösung. Sei $u_0 \neq 0$, dann

$$\frac{du}{dx} = xu(x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{y_0}^{y} \frac{du}{u^2} = \int_0^x xdx$$

Wir haben $-\frac{1}{u} + \frac{1}{u_0} = \frac{x^2}{2}$. Also

$$u(x) = \frac{2}{\frac{2}{u_0} - x^2}$$

d.h $u(x)$ ist auf die ganze $\mathbb{R}$ definiert genau dann wenn $u_0 \leq 0$.

4. Multiple Choiche

In den folgenden Fragen geht es um die lineare Differentialgleichung

$$u^{(2)} - 5u' + 6u = q(x) \tag{L}$$

mit Inhomogenität $q(x)$. Entscheide, welche der folgenden Aussagen korrekt sind.

1. Sei $q(x) = 1$.

(a) $u(x) = e^{2x}$ ist eine Lösung von (L)

Nein, $u(x) = e^{2x}$ ist eine homogene Lösung.

√ (b) $u(x) = \frac{1}{6}$ ist eine Lösung von (L)

√ (c) $u(x) = \frac{1}{6} + e^{2x}$ ist eine Lösung von (L)

2. Se $q(x) = e^{2x}$

$\surd$ (a) $u(x) = -xe^{2x}$ ist eine Lösung von (L)

(b) $u(x) = -xe^{3x}$ ist eine Lösung von (L)

3. Sei $q(x) = \cos(x)$

$\surd$ (a) $\frac{\cos(x)}{10} - \frac{\sin(x)}{10}$ ist eine Lösung von (L)

Ja, $\cos(x) = \mathfrak{Re}(e^{ix})$. Wir betrachte $u^{(2)} - 5u' + 6u = e^{ix}$. Eine komplexe Lösung ist gegeben durch $\tilde{u}(x) := \frac{e^{ix}}{5-5i}$ Also ist die Realteil $\frac{\cos(x)}{10} - \frac{\sin(x)}{10}$ eine Lösung von(L) .

(b) $\frac{e^{ix}}{5-5i}$ ist eine komplexe Lösung von (L)

False, $\frac{e^{ix}}{5-5i}$ ist eine komplexe Lösung von $u^{(2)} - 5u' + 6u = e^{ix}$.