Lösung

1. Berechne die Ableitung der Funktion x^a, für $a \neq 0$.

Lösung.

Wir schreiben $x^a = \left(e^{\ln(x)}\right)^a = e^{a\ln(x)}$.

$$\begin{aligned}(x^a)' &= \left(e^{a\ln(x)}\right)' \\ &= (a\ln(x))'\, e^{a\ln(x)} \\ &= \frac{a}{x} e^{a\ln(x)} \\ &= \frac{a}{x} x^a \\ &= a x^{a-1}\end{aligned}$$

2. Bestimme die allgemeinen reellen und komplexen Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen:

a) $f''(x) = -f(x)$,

Lösung.

Mit dem Ansatz $f(x) = e^{\lambda x}$ und $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom und dessen Lösungen

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Mit

$$f_1(x) = e^i x, \quad f_2(x) = e^{-ix}$$

ist die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung (Superpositionsprinzip)

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus rellen Linearkombinationen von Real- und Imaginärteil von f_1 und f_2, also von $\cos(x)$ und $\sin(x)$:

$$f(x) = A_1 \cos(x) + A_2 \sin(x), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Bitte wenden!

b) $f''(x) = -f(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$

Lösung.

Aus Aufgabe **1a)** wissen wir

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 \cos(x) + A_2 \sin(x), \quad f(0) = A_1 + A_2 \cdot 0 = 0 \\ f'(x) &= -A_1 \sin(x) + A_2 \cos(x), \quad f'(0) = A_1 \cdot 0 + A_2 = 1. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 1.$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$f(x) = \sin(x).$$

c) $f''(x) = f(x)$

Lösung.

Mit dem Ansatz $f(x) = e^{\lambda x}$ und $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom und dessen Lösungen

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \pm 1.$$

Mit

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = e^{-x}$$

ist die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung (Superpositionsprinzip)

$$f(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus rellen Linearkombinationen von Real- und Imaginärteil von f_1 und f_2, also von e^x und e^{-x}:

$$f(x) = A_1 e^x + A_2 e^{-x}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

d) $f''(x) = f(x), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1,$

Lösung.

Aus Aufgabe **1c)** wissen wir

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 e^x + A_2 e^{-x}, \quad f(0) = A_1 + A_2 = 0 \\ f'(x) &= A_1 e^x - A_2 e^{-x}, \quad f'(0) = A_1 - A_2 = 1. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

$$\Rightarrow \quad A_1 = -A_2 = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh(x).$$

3. Bestimme die allgemeinen reellen und komplexen Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen:

a) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 25x(t) = 0.$

Lösung. Mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom und dessen Lösungen

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_{1,2} = 3 \pm 4i.$$

Mit

$$x_1(t) = e^{(3+4i)t}, \quad x_2(t) = e^{(3-4i)t}$$

ist die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung (Superpositionsprinzip)

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = e^{3t}(C_1 e^{4it} + C_2 e^{-4it}), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus rellen Linearkombinationen von Real- und Imaginärteil von x_1 und x_2, also von $e^{3t}\cos(4t)$ und $e^{3t}\sin(4t)$:

$$x(t) = A_1 e^{3t}\cos(4t) + A_2 e^{3t}\sin(4t), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

b) $x^{(4)} - 2x^{(2)}(t) + x(t) = 0.$

Lösung. Mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und $x^{(2)}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, $x^{(4)}(t) = \lambda^4 e^{\lambda t}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom und dessen Lösungen

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_{3,4} = -1.$$

Mit

$$x_1(t) = e^t, \quad x_2(t) = te^t, \quad x_3(t) = e^{-t}, \quad x_4(t) = te^{-t}$$

ist die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung (Superpositionsprinzip)

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + C_3 x_3(t) + C_4 x_4(t) \\ &= C_1 e^t + C_2 te^t + C_3 e^{-t} + C_4 te^{-t}, \quad C_i \in \mathbb{C}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus reellen Linearkombinationen von Real- und Imaginärteil von x_i, $i \in \{1, 2, 3, 4, \}$:

$$x(t) = A_1 e^t + A_2 te^t + A_3 e^{-t} + A_4 te^{-t}, \qquad A_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Bitte wenden!

c) $\ddot{x}(t) - (a+b)\dot{x}(t) + abx(t) = 0, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$

Lösung. Mit dem Ansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ und $\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ergibt sich für das charakteristische Polynom und dessen Lösungen

$$\lambda^2 - \lambda(a+b) + ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a-b)^2}}{2}.$$

Jetzt gibt es zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $a \neq b$.

$$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = b \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = e^{at}, \quad x_2(t) = e^{bt}.$$

Die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung ist somit

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus reellen Linearkombinationen von Real- und Imaginärteil von x_1 und x_2:

$$x(t) = A_1 e^{at} + A_2 e^{bt}, \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

Fall 2: $a = b$.
In diesem Fall haben wir eine doppelte Nullstelle

$$\lambda_{1,2} = a \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = e^{at}, \quad x_2(t) = te^{at}.$$

Die allgemeine komplexe Lösung der Differentialgleichung ist in diesem Fall

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) = e^{at}(C_1 + C_2 t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Die allgemeine reelle Lösung ergibt sich aus reellen Linearkombinationen von Real- und Imaginärteil von x_1 und x_2:

$$x(t) = e^{at}(A_1 + A_2 t), \quad A_1, A_2 \in \mathbb{R}.$$

4. Löse die Differentialgleichungen in Aufgaben **2c)** und **3a)** mit folgenden Anfangsbedingungen:

a) $f''(x) - f(x) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$
Lösung. Aus Aufgabe **2c)** wissen wir

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 e^x + A_2 e^{-x}, \quad & f(0) &= A_1 + A_2 = 1 \\ f'(x) &= A_1 e^x - A_2 e^{-x}, \quad & f'(0) &= A_1 - A_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = A_2 = \frac{1}{2}.$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh(x).$$

Siehe nächstes Blatt!

b) $\ddot{x}(t) - 6\dot{x}(t) + 25x(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$

Lösung. Aus Aufgabe **3a)** wissen wir

$$\begin{aligned} x(t) =& A_1 e^{3t}\cos(4t) + A_2 e^{3t}\sin(4t), \quad x(0) = A_1 = 0 \\ \dot{x}(t) =& A_1 e^{3t}(3\cos(4t) - 4\sin(4t)) \\ & + A_2 e^{3t}(3\sin(4t) + 4\cos(4t)), \quad \dot{x}(0) = 4A_2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A_2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Somit ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$x(t) = \frac{e^{3t}\sin(4t)}{4}.$$

5. Ziel dieser Aufgabe ist es, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$s''(t) = a, \qquad a \in \mathbb{R} \qquad\qquad (*)$$

zu bestimmen.

a) Löse die Gleichung $s''(t) = 0$ mit Hilfe des Rezeptes aus der Vorlesung.
Lösung. Der aus der Vorlesung bekannte Ansatz

$$u(t) = e^{\lambda t}, \quad u'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

ergibt für das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2$, welches die zweifache Nullstelle $\lambda = 0$ hat. Somit ist die Lösung dieser homogenen Gleichung $s_h(t) = A + Bt$ wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

b) Sind s_1 und s_2 Lösungen von $(*)$, so löst auch $s = s_1 - s_2$ die Gleichung in **a)**.
Lösung. Sind $s_1(t)$ und $s_2(t)$ Lösungen von $(*)$, so ist $s(t) = s_1(t) - s_1(t)$ wegen

$$s''(t) = s_1''(t) - s_1''(t) = a - a = 0$$

eine Lösung der Gleichung in **a)**.

c) Finde *eine* Lösung s_p on $(*)$.
Lösung. Zum Beispiel mit Hilfe elementarer Integration

$$\begin{aligned} & s''(t) = a \\ \Rightarrow\ & s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int a\,dt = at + C \\ \Rightarrow\ & s(t) = \int s'(t)\,dt = \int at + C\,dt = \frac{1}{2}at^2 + Ct + D, \quad C, D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Da nur *eine* Lösung verlangt ist, wählen wir $C = D = 0$, also $s_p(t) = \frac{1}{2}at^2$.

Bitte wenden!

d) Die allgemeine Lösung von $(*)$ ist von der Form $s(t) = s_p(t) + s_h(t)$, wobei $s_h'' = 0$.

Lösung. Aus **a)** und **c)** ergibt sich

$$s(t) = s_p(t)+s_h(t) = \frac{1}{2}at^2+Ct+D+A+Bt = \frac{1}{2}at^2+bt+c, \quad b := C+B, \quad c := D+A.$$

Dies löst $(*)$, wie man durch Einsetzen verifizieren kann:

$$s'(t) = at + b, \quad s''(t) = a.$$