ETH Zürich
Dr. T. Bühler

Sommer 2014

Basisprüfung in Grundlagen der Mathematik I

Studiengänge Chemie, Chemieingenieurwissenschaften, Interdisziplinäre Naturwissenschaften

Bitte ausfüllen!

Name:	
Vorname:	
Legi Nr.:	

Bitte nicht ausfüllen!

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
Total		

Vollständigkeit	

Bitte wenden!

Wichtig:

- Tragen Sie **jetzt** Ihren Namen und Ihre Leginummer in das Deckblatt ein.
- Schalten Sie Ihr Mobiltelefon aus und verstauen Sie es im Gepäck.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einem Aufgabenteil, der Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- Beginnen Sie **jede** Aufgabe auf einem **neuen** Blatt und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Lassen Sie am Rand genügend Platz für die Korrekturen.
- Begründen Sie Ihre Lösungen und notieren Sie die Zwischenschritte.
- Geben Sie pro Aufgabe nur **eine** Lösung ab.
- Schreiben Sie **nicht** mit **Bleistift**, **roter** oder **grüner Farbe** und verwenden Sie **keinen Tipp-Ex**.

Zugelassene Hilfsmittel:

- 20 selbstverfasste A4-Seiten
- eine Formelsammlung, ein Wörterbuch
- **kein** Taschenrechner
- **kein** Handy

Siehe nächstes Blatt!

1. Berechne

$$\lim_{x\to 1} \frac{n - \sum\limits_{k=1}^{n} x^k}{x-1}.$$

(4 P)

2. Untersuche das Konvergenzverhalten folgender Reihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(6 P)

3. Gegeben seien die Folgen

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+2), \qquad b_n = xn^3 + yn^2 + zn, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

a) Berechne die Koeffizienten x, y und z so, dass $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ und $a_3 = b_3$ ist.

b) Beweise mit Induktion nach n, dass dann $a_n = b_n$ für alle n richtig ist. **(6 P)**

4. Berechne das Taylorpolynom 4-ter Ordnung von

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

um den Punkt $x = 0$. **(9 P)**

5. Berechne

$$\int \frac{\sin(2x)}{(1+\sin^2(x))^2}\, dx.$$

(6 P)

6. Bestimme die allgemeine (komplexe) Lösung von

$$u^{(6)}(x) - 2u^{(3)}(x) + u(x) = x^4 - 48x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(9 P)

Bitte wenden!

7. Gegeben sei das Vektorfeld

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - y\cos(x) \\ 2xy - \sin(x) + e^y \end{pmatrix}$$

a) Ist V wirbelfrei? (Antwort begründen.)

b) Ist V ein Potentialfeld? Wenn ja: gib eine Potentialfunktion an. Wenn nein: warum? **(6 P)**

8. Berechne die Arbeit

$$\int_\gamma K \cdot ds$$

des Vektorfeldes

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 \\ 3xy \end{pmatrix}$$

längs folgender Wege von $(0,0)$ nach $(2,4)$:

a) Auf einer Geraden.

b) Auf zwei Geraden via $(1,1)$.

c) Auf der Parabel $y = x^2$. **(9 P)**

VIEL ERFOLG!