Lösung zu Serie 1

1. **a)** Die xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$ ist durch die Gleichung $z = 0$ gegeben. Die Punkte oberhalb bzw. unterhalb dieser Ebene sind durch die Eigenschaft $z > 0$ bzw. $z < 0$ bestimmt. Damit ist die Menge der Punkte im $\mathbb{R}^3$ unterhalb und auf der xy-Ebene gerade die Menge der Punkte (x, y, z), die $z \leq 0$ erfüllen. (Die Werte von x und y dürfen beliebig in $\mathbb{R}$ variieren.)

b) Die einzige offene Punktmenge, die von den Koordinatenebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und den zu ihnen jeweils parallelen Ebenen $x = 3$, $y = 3$, $z = 3$ berandet wird, ist die Menge der Punkte mit $0 < x < 3$, $0 < y < 3$, $0 < z < 3$. Da die berandenden Ebenen eingeschlossen sein sollen, ist der gesuchte Würfel durch die Ungleichungen

$$0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 3$$

gegeben.

c) Dass die gesuchte Gerade parallel zur z-Achse verläuft, bedeutet nichts anderes als dass sie durch Gleichungen $x \equiv \text{const}$ und $y \equiv \text{const}$ gegeben ist. Andererseits soll die Gerade durch den Punkt $(2, -5, 3)$ verlaufen. Damit ist also durch

$$x = 2,\ y = -5,\ z \in \mathbb{R}$$

eine Parametrisierung der Geraden gegeben.

d) Da der gesuchte Kreis in der Ebene $x = 3$ liegen soll, als Mittelpunkt $(3, 2, 1)$ haben soll und als Radius 5 haben soll, liegt ein Punkt (x, y, z) also genau dann auf diesem Kreis, wenn $x = 3$ ist und der Abstand

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

von (x, y, z) zu $(3, 2, 1)$ den Wert 5 beträgt. Dies ist äquivalent zu

$$x = 3,\ (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25.$$

e) Die Kugeloberfläche der Kugel mit Radius 5 um den Mittelpunkt $(2, 1, 0)$ ist gegeben durch die Gleichung

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

(denn dies beschreibt genau die Punkte (x, y, z), die Abstand 3 zu $(2, 1, 0)$ haben). Der Äquator ist durch den Schnitt der Kugeloberfläche mit der zur xy-Ebene parallelen Ebene, in der der Mittelpunkt liegt, gegeben. Im vorliegenden Fall ist dies die xy-Ebene selbst. Damit besteht der Äquator hier aus all den Punkten der Kugeloberfläche mit $z = 0$, die obere Hemisphäre aus all den Punkten der Kugeloberfläche mit $z > 0$ und die untere Hemisphäre aus all den Punkten der Kugeloberfläche mit $z < 0$.

Die obere Hälfte der Kugeloberfläche inklusive des Äquators mit Radius 3 und Mittelpunkt $(2, 1, 0)$ ist demnach durch die Un-/Gleichungen

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$$

gegeben.

2. **a)** Dies ist die Definition des abgeschlossenen 1. Oktanten.

b) Die Menge der Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x = -1$, $z = 2$ und beliebigem $y \in \mathbb{R}$ kann zum Beispiel parametrisiert werden als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Hier erkennt man die Parametrisierung einer Geraden durch den Punkt $(-1, 0, 2)$ mit Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (also parallel zur y-Achse).

c) Da $z = 3$ gefordert wird, liegt das gesuchte geometrische Objekt in der durch die Gleichung $z = 3$ gegebenen Ebene. Die Beziehung $x^2 + y^2 \leq 4$ drückt nun gerade aus, dass der Abstand von (x, y) zu $(0, 0)$ bzw. der Abstand von $(x, y, 3)$ zu $(0, 0, 3)$ kleiner oder gleich $\sqrt{4} = 2$ ist. Damit beschreiben die Bedingungen gerade die Kreisscheibe (inklusive ihres Randes) in der $z = 3$–Ebene mit Radius 2 um den Mittelpunkt $(0, 0, 3)$.

d) Die Gleichung

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 16$$

kann als

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = 4^2$$

gelesen werden, also als die Bedingung, dass der Punkt (x, y, z) von $(1, -2, 0)$ den Abstand 4 hat. Somit ist die gesuchte Menge gerade die Oberfläche der Kugel mit Radius 4 um den Mittelpunkt $(1, -2, 0)$.

e) Durch quadratische Ergänzung kann die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z - 12 = 0$$

zur äquivalenten Gleichung

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 6z + 9 = 12 + 4 + 9$$

bzw.

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 25$$

umformen. Wie zuvor erkennt man hierin die Gleichung der Kugeloberfläche mit Radius 5 um den Punkt $(2, 0, -3)$.

3. **a)** Der Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ ist gegeben durch

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors berechnet sich nun zu

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

b) Die Vektoren, die in die Richtung von $\overrightarrow{P_1P_2}$ zeigen, sind genau die Vektoren der Form

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

mit einem positiven Faktor $\lambda > 0$. Da ein Einheitsvektor $\overrightarrow{u}$ dieser Art gesucht wird, muss dass entsprechende λ für $\overrightarrow{u}$ den Wert

$$\frac{1}{\|\overrightarrow{P_1P_2}\|} = \frac{1}{3}$$

haben. $\overrightarrow{u}$ ist somit

$$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Parametrisiert man die Strecke von P_1 nach P_2 durch

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(also wie wenn ein Teilchen sich geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit von P_1 zum Zeitpunkt 0 im Laufe einer Zeiteinheit zu P_2 bewegt), dann ist klar, dass der Mittelpunkt bei $t = \frac{1}{2}$ erreicht wird. Den Mittelpunkt erhält man also als Ergebnis der Rechnung

$$\frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

d) Für $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ergibt sich

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Somit ergibt sich für $3\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2}$:

$$3\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Länge dieses Vektors berechnet sich nun zu

$$\|3\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2}\| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{29}.$$

e) In Aufgabenteil b) wurde bereits ein Einheitsvektor $\overrightarrow{u}$ bestimmt, der in dieselbe Richtung wie $\overrightarrow{P_1P_2}$ zeigt. Es gilt:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = 3\overrightarrow{u}.$$

f) Die Standardbasisvektoren sind

$$\vec{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}.$$

4. Zwei Vektoren sind senkrecht, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet. Bei zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ im $\mathbb{R}^3$ liefert das Kreuzprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ einen Vektor, der sowohl auf $\vec{u}$ als auch auf $\vec{v}$ senkrecht steht. Damit ergibt sich:

a) $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$ sind orthogonale Vektoren in $\mathbb{R}^2$, da

$$\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) = 0.$$

Da hier Vektoren in $\mathbb{R}^2$ betrachtet werden, gibt es keinen von Null verschiedenen Vektor, der auf den beiden obigen Vektoren senkrecht stehen könnte. (Gäbe es nämlich einen solchen Vektor, so hätte man ein Tripel linear unabhängiger Vektoren in $\mathbb{R}^2$ gefunden – im Widerspruch zur Zweidimensionalität des $\mathbb{R}^2$. <u>Alternativ</u> kann man argumentieren, dass ein auf beiden Vektoren senkrechter Vektor $\big(x, y\big)$ das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 3y &= 0 \\ 6x - 2y &= 0 \end{cases}$$

lösen muss. Dieses System besitzt aber nur die triviale Lösung $x = 0,\ y = 0$.)

b) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ sind orthogonale Vektoren in $\mathbb{R}^3$, da

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = 0.$$

Einen zu beiden Vektoren nichttrivialen orthogonalen Vektor liefert das Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 \cdot (-3) - 1 \cdot 2\\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-3)\\ 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\4\\1\end{pmatrix}.$$

c) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix}$ sind keine orthogonalen Vektoren in $\mathbb{R}^3$, da

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-4\\-6\end{pmatrix} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot (-6) = -28 \neq 0.$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind sogar linear abhängig, da $\vec{v} = -2\vec{u}$. Da das Kreuzprodukt im Fall linear abhängiger Vektoren den Nullvektor als Ergebnis liefert, muss zum Finden von nichttrivialen Vektoren $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, die auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht stehen, eine andere Idee her. Zunächst einmal bemerke man, dass jeder Vektor, der auf $\vec{u}$ senkrecht ist, auch auf $\vec{v}$ senkrecht ist. Dies liegt daran, dass $\vec{v}$ proportional zu $\vec{u}$ ist. Wenn also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 0,$$

dann ist auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \vec{u} = 0.$$

(Im vorliegenden Fall beträgt der Proportionalitätsfaktor $\lambda = -2$.) Und ein Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ steht genau dann senkrecht auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, wenn $x + 2y + 3z = 0$ gilt. Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist

$$\left\{ y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. **a)** Die Gerade durch den Punkt $(3, 4, 5)$ parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ kann parametrisiert werden durch

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3, \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Schreibt man dies in Komponenten aus, so erhält man:

$$x = 3,\ y = 4 - t,\ z = 5 - 2t,\ t \in \mathbb{R}.$$

b) Die Gerade durch $P = (-3, 2, 1)$ und $Q = (-4, 0, 2)$ kann parametrisiert werden durch

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3, \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \left[\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

In Komponenten geschrieben ergibt sich:

$$x = -3 - t,\ y = 2 - 2t,\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}$$

c) Die Strecke zwischen P und Q erhält man genau dann, wenn man in der vorigen Parametrisierung t zwischen 0 und 1 rangieren lässt. Für $t = 0$ erhält man nämlich P, für $t = 1$ den Punkt Q und wenn t von 0 nach 1 verläuft, bewegt sich

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von P in Richtung des Vektors $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. a) Da E_1 gegeben ist durch die Gleichung

$$x - y + 2z = 3,$$

also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3,$$

steht der Vektor

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf E_1. (Für zwei Punkte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) in E_1 gilt nämlich:

$$0 = 3 - 3 = (x_1 - y_1 + 2z_1) - (x_2 - y_2 + 2z_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

sodass also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

orthogonal auf E_1 steht.)

b) Eine zu E_2 parallele Ebene muss senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ stehen, der senkrecht auf E_2 steht. Damit muss die gesuchte Ebene also durch eine Gleichung der Form

$$x + 2y + 3z = c,$$

gegeben sein, wobei c eine Konstante ist. Da $(-1, 1, 1)$ auf dieser Ebene liegt, gilt

$$c = -1 + 2 + 3 = 4.$$

Die Gleichung der gesuchten Ebene ergibt sich damit zu

$$x + 2y + 3z = 4.$$

c) Ein Punkt $(x, y, z) = (t+1, 3t, -t-3)$ liegt genau dann in der Ebene E_1, wenn

$$3 = x - y + 2z = (t+1) - 3t + 2(-t-3) = -4t - 5$$

gilt. Damit muss $t = -2$ sein und der gesuchte Punkt ist $(-1, -6, -1)$.

d) Die Schnittgerade der Ebenen E_1 und E_2 muss sowohl auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2, \end{pmatrix}$ der senkrecht zu E_1 ist, als auch auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3, \end{pmatrix}$ der zu E_2 senkrecht ist, orthogonal stehen. Das Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren besitzt diese Eigenschaft:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e) Aufgrund der vorangegangenen Teilaufgabe hat die Schnittgerade von E_1 und E_2 die Gestalt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Es bleibt also lediglich ein Punkt (a, b, c) zu finden, der sowohl in E_1 als auch in E_2 liegt. Man kann $c = 0$ setzen (denn wenn man einen Punkt (A, B, C) mit $C \neq 0$ gefunden hat, würde die obige Parametrisierung für $t = -\frac{C}{3}$ einen Punkt mit letzter Koordinate $= 0$ liefern). Es ist also $(a, b, 0)$ gesucht mit

$$\begin{cases} a - b &= 3, \\ a + 2b &= 0. \end{cases}$$

Es folgt $b = -1$ und $a = 2$. Der Punkt $(2, -1, 0)$ liegt somit im Schnitt von E_1 und E_2 und die Schnittgerade ist durch

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

gegeben.