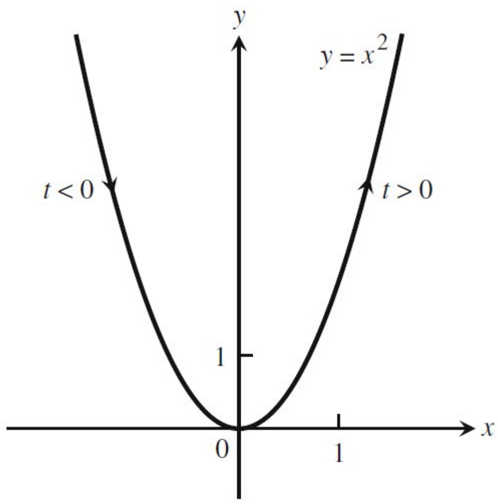
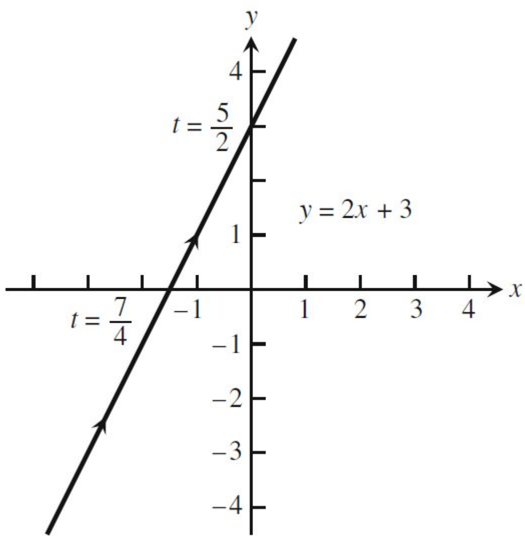
Lösung zu Serie 2

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 2 sind der Fokus der Übungsstunden vom 1./3. März.

1. **a)** $y = x^2$ und es wird die ganze Parabel einmal durchlaufen, denn x nimmt alle reellen Werte einmal an, da $-\infty < t < +\infty$.

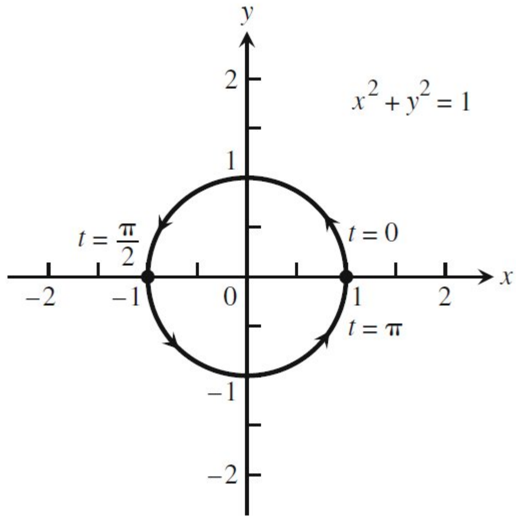


b) $y = 2x + 3$ und es wird die ganze Gerade einmal durchlaufen, denn y und x nehmen alle reellen Werte einmal an, da $-\infty < t < +\infty$.

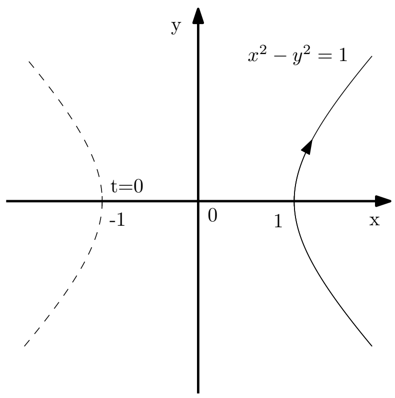


c) $x^2 + y^2 = 1$ und es wird der ganze Kreis durchlaufen, insbesondere hat der Parameter

t die Bedeutung des Winkels zwischen der positiven x-Halbachse und dem Ortsvektor $(\cos(2t), \sin(2t))$ und da die Winkelgeschwindigkeit dieser Kurve doppelt so schnell ist, wie diejenige des standardmässig parametrisierten Einheitskreises $(\cos t, \sin t)$ (parametrisiert im Gegenuhrzeigersinn) verläuft die Kurve für $0 \leq t \leq \pi$ einmal um den ganzen Kreis.



d) $x^2 - y^2 = 1$ und es wird der rechte Scheitel (von rechts unten nach rechts oben) durchlaufen, da $\cosh t$ immer positiv ist.



2. Ähnlich wie beim Kreis, wird eine durch die Gleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ gegebene Ellipse durch

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

parametrisiert, falls sie gegen den Uhrzeigersinn und genau einmal durchlaufen wird. Deshalb stellen die folgenden Parametrisierungen mögliche Lösungen der Aufgabe dar.

a) $x = a\cos t, \quad y = -b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

b) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

c) $x = a\cos t, \quad y = -b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$

d) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$

3. **a)** Die gesuchte Halbgerade soll sich bei $t = 0$ an der Stelle $x(0) = -1$, $y(0) = 2$ befinden und danach irgendwann durch den Punkt $(0, 0)$ verlaufen. Ein Richtungsvektor der Geraden ist also durch

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit wäre eine Parametrisierung des Strahls

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

wobei $t \geq 0$ sei. Eine mögliche Parametrisierung ist somit

$$x = -1 + (0 - (-1))t = -1 + t, \quad y = 2 + (0 - 2)t = 2 - 2t, \quad 0 \leq t.$$

b) Umstellen der gegebenen Gleichung liefert

$$x = y^2 + 1.$$

Insbesondere kann y als freier Parameter gewählt werden. Da nur nach der unteren Parabelhälfte gefragt ist, braucht y lediglich im Bereich $(-\infty, 0]$ zu rangieren. Damit ist eine mögliche Antwort:

$$x = t^2 + 1, \quad y = t, \quad t \leq 0.$$

c) Der linke Scheitel der Hyperbel mit der Gleichung $x^2 - 4y^2 = 4$ ist gegeben als die Menge aller Lösungen dieser Gleichung mit $x \leq 0$. Zu jedem $y \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein solches x, und zwar

$$x = -\sqrt{4 + 4y^2}.$$

Somit kann die folgende Parametrisierung gewählt werden:

$$x = -\sqrt{4 + 4t^2},\ y = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung: Mit dem hyperbolischen Satz des Pythagoras kann man sehen, dass

$$x(t) = -2\cosh(t),\ y(t) = \sinh(t),\ t \in \mathbb{R}$$

ebenfalls eine Parametrisierung aller Lösung der Hyperbelgleichung mit $x \leq 0$ darstellt.

4. Durch Ableiten der Kurvengleichung nach dem Kurvenparameter erhält man stets einen Vektor, der parallel zur Tangente ist.

a) Für die Kurve

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

erhält man somit an der Stelle $(x(t), y(t))$ einen tangentialen Vektor als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}.$$

Damit hat die Tangente an der Stelle $t = \frac{1}{4}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Richtungsvektor und verläuft durch den Vektor $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Man findet dann leicht die Tangentengleichung

$$y(x) = x + \frac{1}{4}.$$

Da in diesem Fall die Kurve direkt in der Form $y(x) = \sqrt{x}$ geschrieben werden kann (Elimination der Variablen t ist nicht so kompliziert), kann die gesuchte zweite Ableitung direkt berechnet werden: $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$.

b) Analog zum obigen Vorgehen hat man die Gleichung einer Geraden mit Richtung $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ durch den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen. Man erhält $y = x - 4$. Wieder kann t aus den Gleichungen für x und y eliminiert werden, nämlich durch

$$y = t^4 = (t^2)^2 = \big(\frac{x-3}{2}\big)^2.$$

Damit lässt sich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}$$

berechnen.

c) Es ist $(x_{t=0}, y_{t=0}) = (0 + e^0, 1 - e^0) = (1, 0)$. Desweiteren ist

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \left.\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}\right|_{t=0} = \left.\frac{-e^t}{1+e^t}\right|_{t=0} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

Dann ist die Tangente an die Kurve im Punkt $(1, 0)$ gegeben durch

$$(y - 0) = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Der Wert $\frac{d^2y}{dx^2}$ berechnet sich wie folgt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy'}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{-e^t}{1+e^t}\right)}{1+e^t} = \frac{\frac{-e^t(1+e^t)-(-e^t)(e^t)}{(1+e^t)^2}}{1+e^t} = \frac{-e^t}{(1+e^t)^3}$$

und somit

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{-1}{(1+1)^3} = -\frac{1}{8}.$$

5. Die Bogenlänge des Graphen einer differenzierbaren Funktion

$$f : [a, b] \to \mathbb{R} \qquad \text{ist durch} \qquad \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

gegeben. Insbesondere erhalten wir

a) für $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $a = 0$ und $b = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx \\ &= \frac{2}{3}\frac{4}{9}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{13^{\frac{3}{2}} - 8}{27} \approx 1.44,\end{aligned}$$

b) für $f(x) = x^2$, $a = 0$ und $b = 1$ ergibt sich (unter Zuhilfenahme der Substitution $2x = \sinh(u)$):

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx = \int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \frac{1}{2}\cosh^2(u)\ du \\ &= \frac{1}{4}\Big[u + \sinh(u)\cosh(u)\Big]_{u=0}^{u=\operatorname{arsinh}(2)} \\ &= \frac{1}{4}\Big(\operatorname{arsinh}(2) + \underbrace{\sinh(\operatorname{arsinh}(2))}_{=2}\underbrace{\cosh(\operatorname{arsinh}(2))}_{=\sqrt{1+2^2}}\Big).\end{aligned}$$

Da $u = \operatorname{arsinh}(2)$ die eindeutige positive Lösung der Gleichung

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = 2,$$

was eine quadratische Gleichung in e^u ist, ergibt sich nach Lösen der quadratischen Gleichung und anschließendem Logarithmieren $u = \ln(2 + \sqrt{5})$. Insgesamt erhält man als Bogenlänge

$$\frac{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right) + 2\sqrt{5}}{4} \approx 1.48.$$

c) Ist eine Kurve mittels einer Parametrisierung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ gegeben, so ist die Länge dieser Kurve von a nach b gegeben durch

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Für die Zykloide ist

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

Aber da $\sqrt{1 - \cos(2\pi - t)} = \sqrt{1 - \cos t}$ ist das Integral über $\sqrt{1 - \cos t}$ von 0 bis π dasselbe wie von π bis 2π. Nun verwenden wir die Substitution

$$u := \cos t, \quad \text{resp.} \quad \arccos u = t, \quad \text{und} \quad \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2}}\, du = dt$$

wobei die Grenzen nun $-1 = \cos\pi$ und $1 = \cos 0$ sind.

Dann ist

$$\begin{aligned} L &= 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2}\int_1^{-1} \sqrt{1-u}\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\,du \\ &= 2\sqrt{2}\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\sqrt{2}\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u}\sqrt{1+u}}\,du \\ &= 2\sqrt{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1+u}}\,du = 2\sqrt{2}\cdot\left[2\cdot\sqrt{1+u}\right]_{-1}^1 = 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 8. \end{aligned}$$

Bemerkung: Die Parametrisierung lässt sich wie folgt aufteilen:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t-\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1-\cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Die erste Komponente parametrisiert das Intervall $[0, 2\pi]$ auf der x-Achse, die zweite parametrisiert den Einheitskreis um $(0, 1)$ beginnend mit dem Ursprung im Uhrzeigersinn. Die Superposition dieser beiden Wege beschreibt also, anschaulich gesprochen, die Kurve, die ein Punkt auf der Einheitskreisscheibe durchläuft, wenn diese auf der x-Achse ohne zu gleiten abrollt.

d) Die Ableitung der Parametrisierung nach dem Kurvenparameter t ist

$$-\sin t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + (1+\cos t)\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t\,(1+2\cos t) \\ \cos t\,(1+2\cos t)-1 \end{pmatrix},$$

wobei wir $\cos^2 t - 1 = -\sin^2 t$ verwendet haben.

Für die Bogenlänge erhalten wir daraus zunächst

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \left|\begin{pmatrix} -\sin t\,(1+2\cos t) \\ \cos t\,(1+2\cos t)-1 \end{pmatrix}\right| dt \\ &\quad= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+2\cos t)^2 - 2\cos t\,(1+2\cos t)+1\,dt} \\ &\quad= \int_0^{2\pi} \sqrt{2+2\cos t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos t}\,dt \\ &\quad= \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+\cos(t+\pi)}dt = \sqrt{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1-\cos t}dt \\ &\quad= 2\sqrt{2}\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $t = \arccos u$ folgt wie in 6 c)

$$\int_0^\pi \sqrt{1-\cos t}\,dt = 2\sqrt{2},$$

also ergibt sich für die Bogenlänge $2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2} = 8$.

6. a) Der gegen den Uhrzeigersinn bei $(3,0)$ startend durchlaufene Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(2,0)$ hätte die Parametrisierung

$$\begin{pmatrix} x_0(\theta) \\ y_0(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

(wenn man nach dem Winkel θ parametrisieren mag). Die in der Aufgabenstellung gesuchte Parametrisierung ergibt sich nun aber, wenn man an der Achse $x = 2$ spiegelt (dies entspricht der Transformation $x_0 \mapsto x = 4 - x_0,\ y_0 \mapsto y = y_0$. Die Parametrisierung

$$x(t) = 2 - \cos(\theta),\ y(t) = \sin(\theta),\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ist also eine mögliche Wahl.

b) Wir wollen die Kurve mit dem Parameter θ parametrisieren. Der Skizze können wir entnehmen, dass $\frac{y}{x} = \tan\theta$, insbesondere ist $y - x\tan(\theta) = 0$. Ausserdem ist $y = \sqrt{x}$. Einsetzen liefert

$$x\tan(\theta) - \sqrt{x} = 0,$$

also $x(\theta) = \frac{1}{\tan^2(\theta)}$ und $y(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$. Also ist $(x,y) = \left(\frac{1}{\tan^2(\theta)}, \frac{1}{\tan(\theta)}\right),\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, wobei man durch $(0,0)$ stetig nach $\frac{\pi}{2}$ fortsetzen könnte, denn für $\theta \to \frac{\pi}{2}$ konvergiert $(x(\theta), y(\theta))$ gegen $(0,0)$.

c) Die gegebene Strecke kann als Teil der durch die Gleichung $x + 2y = 4$ beschriebenen Geraden angesehen werden - und zwar als all diejenigen Punkte mit $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Die Gleichung $x + 2y = 4$ und der Zusammenhang $y = x\tan(\theta)$ ergeben schließlich

$$x(\theta)\big(1 + 2\tan(\theta)\big) = 4,$$

also $x(\theta) = \frac{4}{1+2\tan(\theta)}$ und somit $y(\theta) = \frac{4\tan(\theta)}{1+2\tan(\theta)}$. Man bemerke, dass diese Darstellung eigentlich nur für $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ gültig ist, sich aber stetig nach $\frac{\pi}{2}$ durch die natürliche Wahl $(0,2)$ fortsetzen lässt.