Lösung zu Serie 3

1. Im folgenden verwenden wir kartesische Koordinaten, wobei $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ und $r^2 = x^2 + y^2$ respektive $\tan(\theta) = \dfrac{y}{x}$.

a) Es muss $3 \le r \le 4$. In kartesischen Koordinaten ist $r^2 = x^2 + y^2$. Es muss also $3^2 \le x^2 + y^2 \le 4^2$ gelten. Dies beschreibt genau einen Kreisring mit innerem Radius $r_1 = 3$ und äußerem Radius $r_2 = 4$.

b) Aus $r = \dfrac{5}{\sin(\theta) - 2\cos(\theta)}$ folgt $r\sin(\theta) - 2r\cos(\theta) = 5$. Einsetzen der kartesischen Koordinaten liefert, dass $y - 2x = 5$. Diese Gleichung beschreibt also eine Gerade $y = 2x + 5$.

c) Aus $r^2 + 2r^2\cos(\theta)\sin(\theta) = 1$ folgt mittels kartesischen Koordinaten, dass $x^2 + y^2 + 2xy = 1$. Also muss $(x + y)^2 = 1$, respektive $x + y = \pm 1$. Diese Gleichung beschreibt also ein Paar paralleler Geraden $y = -x \pm 1$.

d) Wegen $1 \le r \le 2$ beschreiben diese Gleichungen offenbar wieder einen Teil eines Kreisringes um den Ursprung, der durch zwei Kreislinien mit Radien $r_1 = 1$ und $r_2 = 2$ begrenzt ist. Wegen $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ wird nur der Teil des Kreisringes im 2. Quadranten beschrieben.

Die Bedingung $1 \le r \le 2$ ist äquivalent zu $1 \le x^2 + y^2 \le 2^2$ und wegen $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ muss $0 \ge x,\ 0 \le y$.

e) Wegen $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ folgt mit $\dfrac{y}{x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, dass $y = x$ ist. Wegen $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ muss die Kurve im 1. Quadranten liegen. Ausserdem folgt mit $0 \le r \le \sqrt{8}$ und $x^2 + y^2 = 2x^2 = r^2$, dass $-2 \le x \le 2$. Diese Gleichungen beschreiben also das Streckenstück auf der Diagonalen $y = x$ zwischen $(0,0)$ und $(2,2)$.

2. Die Länge einer Kurve mit der Polargleichung $r = r(\theta)$ für $\alpha \le \theta \le \beta$ berechnet sich wie folgt

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Damit ergibt sich

a) für die Spirale $r(\theta) = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}$:

$$L = \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{e^\theta}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{e^\theta}{\sqrt{2}}\right)^2}\, d\theta = \int_0^\pi \sqrt{2\frac{e^{2\theta}}{2}}\, d\theta = \int_0^\pi e^\theta\, d\theta = e^\theta\Big|_0^\pi = e^\pi - 1,$$

b) und für die Kurve $r(\theta) = \cos^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$:

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \left(3\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\right) \cdot \frac{1}{3}\right)^2}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4\left(\frac{\theta}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right)\right)}\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = \left[\frac{3}{2}\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8} + \frac{\pi}{8},
\end{aligned}$$

wobei wir $\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{t}{2}$ verwendet haben und die trigonometrische Beziehung $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

3. Dazu vergleichen wir die Gleichungen mit denjenigen aus der Theorie. Insbesondere sind dabei die Rotationsachsen zu beachten. Im Allgemeinen hilft für die Veranschaulichung der Körper auch z.B. einen z-Wert zu fixieren und die Form der Kurve in der xy-Ebene zu betrachten. Siehe dazu auch S. 152 im Buch Analysis 2.

1.	d, Ellipsoid	7.	b, Zylinder
2.	i, (Einschaliges) Hyperboloid	8.	j, (Einschaliges) Hyperboloid
3.	a, Zylinder	9.	k, hyperbolisches Paraboloid
4.	g, Kegel	10.	f, elliptisches Paraboloid
5.	l, hyperbolisches Paraboloid	11.	h, Kegel
6.	e, elliptisches Paraboloid	12.	c, Ellipsoid

- Die Ellipsoide (c) und (d) beziehungsweise 1 und 12 können dadurch unterschieden werden, dass das Ellipsoid mit der Gleichung $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$ in z-Richtung kürzer als in die anderen Richtungen ist, während die Gleichung $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$ ein Ellipsoid beschreibt, das in z-Richtung am längsten und in x-Richtung am kürzesten ist.
- Dass 3 einen Zylinder beschreibt, der in x-Richtung zeigt, erkennt man daran, dass die Gleichung von x unabhängig ist. Der Querschnitt des Zylinders senkrecht zur x-Achse ist eine Ellipse, gegeben durch die Gleichung $9y^2 + z^2 = 16$. Damit entspricht 3 dem Bild (a). Der Zylinder (b) liegt in y-Richtung und der xz-Querschnitt ist eine Ellipse. Dies passe gut zu 7. (Man beachte auch, dass die Ausdehnung in z-Richtung kleiner ist als in x-Richtung.)
- Dass die elliptischen Paraboloide 6 und 10 zu (e) und (f) gehören, erkennt man z.B. daran, dass (e) wie 6 in negativer x-Richtung verläuft, während (f) und 10 in negativer z-Richtung verlaufen.
- Die Doppelkegel (g) und 4 zeigen in x-Richtung, während die Doppelkegel 11 und (h) in y-Richtung zeigen.
- Dass die einschaligen Hyperboloide (i) und (j) zu 2 und 8 kann man auch daran sehen, dass die Hyperboloide (i) und 2 in x-Richtung liegen, während (j) und 8 in y-Richtung liegen.

- Die hyperbolischen Paraboloide 9 und 5 kann man dadurch unterscheiden, dass bei 5 die x-Koordinate mit y quadratisch steigt und mit z quadratisch fällt (genau wie l), während es sich bei 9 und k genau umgekehrt verhält.

4. **a)** Es ist

$$\vec{r}(1) = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{und}$$
$$\dot{\vec{r}}(1) = \vec{i} + (2t)\vec{j} + 2\vec{k}\Big|_{t=1} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Also ist

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+t\\2t\\2+2t\end{pmatrix}.$$

b) Es ist

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}\vec{i} + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\vec{j} + \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{6}\vec{k} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{3}\vec{j} + \frac{2\pi}{9}\vec{k} \quad \text{und}$$
$$\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin t}{\cos^2(t)}\vec{i} + \frac{1}{\cos^2(t)}\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k}\Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{4}{3}\vec{j} + \frac{4}{3}\vec{k}.$$

Also ist

$$\vec{q}(t) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}\\\sqrt{3}\\\frac{2}{3}\pi\end{pmatrix} + \frac{t}{3}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\sqrt{3}+2t\\\sqrt{3}+4t\\\frac{2}{3}\pi+4t\end{pmatrix}.$$

c) Es ist

$$\vec{r}\,(1) = (2\ln(2))\vec{i} + \vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \quad \text{und}$$
$$\dot{\vec{r}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\frac{1}{t+1}\vec{i} + 2t\vec{j} + t\vec{k}\Big|_{t=1} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Also ist

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix}2\ln(2)\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\ln(2)+t\\1+2t\\\frac{1}{2}+t\end{pmatrix}.$$

5. **a)**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[te^{t^2}\vec{i} + e^{-1}\vec{j} + \vec{k}\right]dt &= \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\vec{i} - e^{-t}\vec{j} + t\vec{k}\right]_0^1\\ &= \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right)\vec{i} - \left(e^{-1}-1\right)\vec{j} + \vec{k}\\ &= \left(\frac{e-1}{2}\right)\vec{i} + \left(\frac{e-1}{e}\right)\vec{j} + \vec{k}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(\sin t)\vec{i} + (1+\cos t)\vec{j} + \left(\frac{1}{\cos^2(t)}\right)\vec{k}\right] dt &= \left[(-\cos t)\vec{i} + (t+\sin t)\vec{j} + (\tan t)\vec{k}\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \left(2\frac{\pi}{4} + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j} + (1-(-1))\vec{k} \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{2}\right)\vec{j} + 2\vec{k}.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\vec{i} + \frac{1}{5-t}\vec{j} + \frac{1}{2t}\vec{k}\right] dt &= \left[(\ln|t|)\vec{i} - \ln(|5-t|)\vec{j} + \frac{1}{2}\ln|t|\vec{k}\right]_{t=1}^{t=4} \\ &= (\ln(4) - \ln(1))\vec{i} - (\ln(1) - \ln(4))\vec{j} + \left(\frac{1}{2}\ln(4) - \frac{1}{2}\ln(1)\right)\vec{k} \\ &= \ln(4)\vec{i} + \ln(4)\vec{j} + \ln(2)\vec{k}.\end{aligned}$$

6. **a)** Es ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \vec{i} + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot t^{\frac{1}{2}}\,\vec{k} = \vec{i} + \sqrt{t}\,\vec{k}$$

und somit $|\vec{v}| = \sqrt{1+t}$. Also ist

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\vec{i} + \sqrt{\frac{t}{1+t}}\vec{k}.$$

Die Länge ist

$$L = \int_0^8 \sqrt{1+t}\,dt = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^8 = \frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = 18 - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}.$$

b) Es ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (3\cos^2(t)\cdot(-\sin t))\vec{j} + 3\sin^2(t)\cdot\cos t\vec{k}$$

und somit

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{9\cos^4(t)\sin^2(t) + 9\sin^4(t)\cos^2(t)} \\ &= 3\sqrt{\cos^2(t)\sin^2(t)\left(\cos^2(t)+\sin^2(t)\right)} = 3\cos t\sin t.\end{aligned}$$

Also ist

$$\vec{T} = (-\cos t)\vec{j} + (\sin t)\vec{k}.$$

Die Länge ist

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t\sin t\,dt = \left[\frac{3}{2}\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

c) Es ist

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = (\sin t + t\cos t - \sin t)\vec{i} + (\cos t - t\sin t - \cos t)\vec{j} = (t\cos t)\vec{i} - (t\sin t)\vec{j}$$

und somit

$$|\vec{v}| = \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2} = t.$$

Also ist

$$\vec{T} = (\cos t)\vec{i} - (\sin t)\vec{j}.$$

Die Länge ist

$$L = \int_{\sqrt{2}}^{2} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^{2} = \frac{4}{2} - \frac{2}{2} = 1.$$