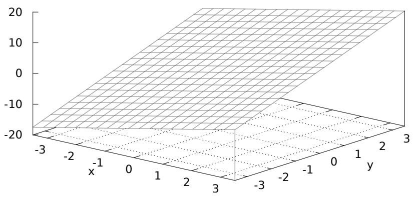
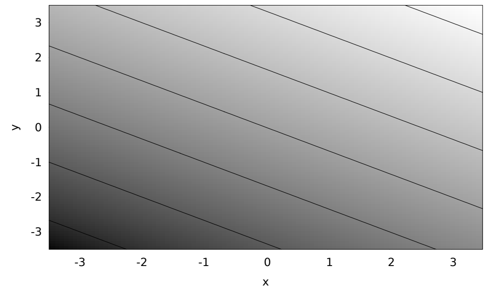
Lösung zu Serie 4

1. **a)** Der Graph der Funktion f ist die Ebene $2x + 3y - z = 0$ im $\mathbb{R}^3$. Die Niveaulinie der Funktion f zum Niveau $c \in \mathbb{R}$ ist die durch $2x + 3y = c$ bzw. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{c}{3}$ gegebene Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Steigung $-2/3$.

Der Wertebereich ist $\mathbb{R}$.



Der Graph von f



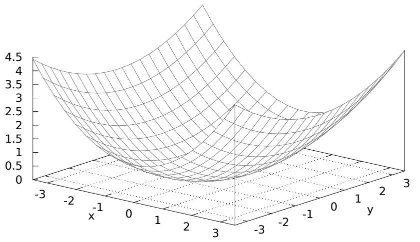
Das Niveaulinienportrait von f

b) Der Graph von g erfüllt die Gleichung $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$. Die Schnittkurven für festgehaltene Werte $y = y_0$ und $x = x_0$ bzw. die Graphen der Funktionen

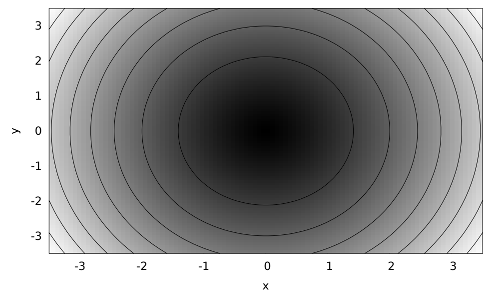
$$x \mapsto g(x, y_0) = \frac{x^2}{4} + \frac{y_0^2}{9}, \qquad \text{und} \quad y \mapsto g(x_0, y) = \frac{x_0^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

sind nach oben geöffnete Parabeln. Der Graph von g ist also ein sogenanntes *elliptisches Paraboloid*. Das Niveaulinienportrait von g setzt sich zusammen aus dem Ursprung (Niveau 0) und den Ellipsen $\left(\frac{x}{2c}\right)^2 + \left(\frac{y}{3c}\right)^2 = 1$ (Niveau $c^2 > 0$).

Da $\frac{x^2}{4}$ und $\frac{y^2}{9}$ immer positiv oder 0 sind, ist der Wertebereich $[0, +\infty)$.



Der Graph von g



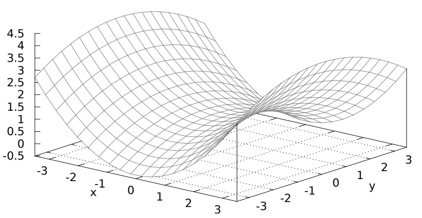
Das Niveaulinienportrait von g

c) Der Graph von φ erfüllt die Gleichung $z - 1 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$. Die Schnittkurven für festgehaltene Werte $y = y_0$ und $x = x_0$ bzw. die Graphen der Funktionen

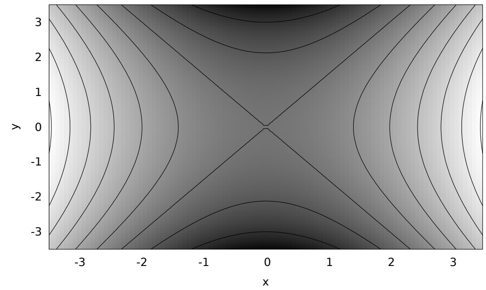
$$x \mapsto \varphi(x, y_0) = \frac{x^2}{4} - \frac{y_0^2}{9} + 1, \qquad \text{und} \quad y \mapsto \varphi(x_0, y) = \frac{x_0^2}{4} - \frac{y^2}{9} + 1$$

sind nach oben bzw. unten geöffnete Parabeln. Der Graph von φ ist also ein sogenanntes *hyperbolisches Paraboloid*. Das Niveaulinienportrait von φ setzt sich zusammen aus den beiden Geraden $y = \pm\frac{3}{2}x$ (zum Niveau 1) und den Hyperbeln $y = \pm\frac{3\sqrt{x^2+4(1-c)}}{2}$ (zum Niveau $c < 1$) und $x = \pm\frac{2\sqrt{y^2+9(c-1)}}{3}$ (zum Niveau $c > 1$).

Es ist $\varphi(x,0) = \frac{x^2}{4} + 1$ und kann offenbar beliebige Werte in $[1,\infty)$ annehmen. Desweiteren ist $\varphi(0,y) = -\frac{y^2}{9} + 1$ und kann offenbar beliebige Werte zwischen $(-\infty, 1]$ annehmen. Daher ist der Wertebereich von φ gleich $\mathbb{R}$.



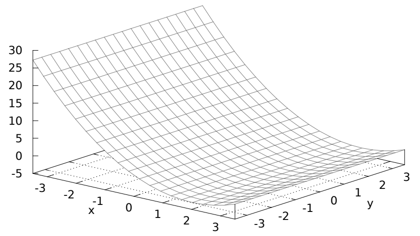
Der Graph von φ



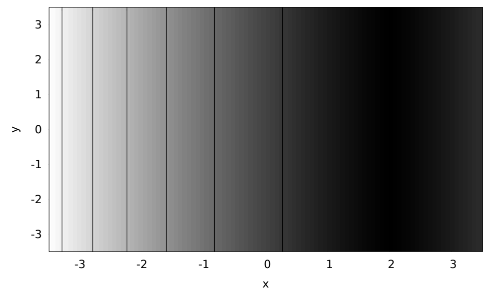
Das Niveaulinienportrait von φ

d) Der Graph von ψ erfüllt die Gleichung $z = (x-2)^2 - 3$ und ist somit ein parabolischer Zylinder mit der Parabel $z = (x-2)^2 - 3$ in der xz-Ebene als Erzeugende und der y-Achse als Achse. Die Niveaulinien von ψ sind die Geraden $x = \pm\sqrt{c+3} + 2$, $c \geq -3$, parallel zur y-Achse.

Da $(x-2)^2 \geq 0$, nimmt die Funktion ihren minimalen Wert bei $x = 2$ also $f(2,y) = -3$ an, ansonsten werden jegliche Werte von -3 bis $+\infty$ angenommen und somit ist der Wertebereich $[-3, +\infty)$.



Der Graph von ψ



Das Niveaulinienportrait von ψ

2. **a)** Der Funktionsgraph (ii) und das Niveaulinienportrait (α).

Die Funktion ist gerade in x, ungerade in y und ihr Graph beschreibt für festgehaltene y eine Parabel. Die Niveaumenge zum Niveau 0 ist durch die Gleichung $(3x^2 - y^2)y = 0$ gegeben, besteht also aus den drei Geraden $y = 0$ und $y = \pm\sqrt{3}x$. Daher kommen nur (ii) und (α) in Frage.

b) Der Funktionsgraph (iv) und das Niveaulinienportrait (β).

Die Funktion ist ungerade in x, gerade in y und sowohl in x als auch in y periodisch. Daher kommen nur (iv) und (β) in Frage.

c) Der Funktionsgraph (iii) und das Niveaulinienportrait (δ).

Die Funktion hängt nur vom Abstand $\sqrt{x^2+y^2}$ zum Ursprung ab. Ihr Graph ist also symmetrisch zur z-Achse und ihr Niveaulinienportrait symmetrisch zum Ursprung. Daher kommen nur (iii) und (δ) in Frage.

d) Der Funktionsgraph (i) und das Niveaulinienportrait (γ).

Die Funktion ist ungerade in x, gerade in y und ihr Graph beschreibt für festgehaltene x eine Kettenlinie. Daher kommen nur (i) und (γ) in Frage.

3. In dieser Aufgabe handelt es sich um Verkettungen stetiger Funktionen. Eine solche Verkettung ist im gesamten Definitionsbereich stetig. Daher bestimmen wir im Folgenden die Definitionsbereiche.

a) Die Funktion $\sin(x+y)$ ist die Verkettung $f(g(x,y))$, wobei $f(z) = \sin(z)$ und $g(x,y) = x+y$. Da $\sin(z)$ für alle $z \in \mathbb{R}$ stetig und $x+y$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ stetig ist, ist auch $\sin(x+y)$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig.

b) Die Funktion $\ln(z)$ ist für alle positiven z definiert und stetig. Für $z \leq 0$ ist $\ln(z)$ nicht definiert. Hier ist $z = x^2+y^2$ und somit ist die Funktion $\ln(x^2+y^2)$ in allen Punkten $(x,y) \neq (0,0)$ stetig.

c) Die Funktion $\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ ist eine Komposition der Funktionen sin, der rationalen Funktion $\frac{1}{z}$ und der Prduktfunktion $(x,y) \mapsto xy$. $\sin(z)$ ist für alle reelle z stetig und die Produktfunktion $(x,y) \mapsto xy$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Die rationale Funktion $\frac{1}{z}$ ist jedoch nur für Punkte $z \neq 0$ definiert. Hier ist $z = xy$ und somit ist f stetig in allen Punkten außer Punkten der Gestalt $(x,y) = (0,y)$ oder $(x,y) = (x,0)$ (also Punkten, die auf einer der beiden Koordinatenachsen liegen).

d) Hier handelt es sich wieder um eine Komposition von Funktionen. Insbesondere ist wie vorher die rationale Funktion $\frac{1}{z}$ in allen Punkten $z \neq 0$ stetig. Da hier $z = 2+\cos x$ und $-1 \leq \cos x \leq 1$ kann z nie 0 sein und somit ist die Funktion also in allen Punkten (x,y) stetig.

4. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy-1), \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy-1).$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial t} = -2\pi\sin(2\pi t - \alpha), \quad \dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(2\pi t - \alpha).$

d) $\dfrac{\partial h}{\partial \varrho} = \sin\varphi\cos\vartheta, \quad \dfrac{\partial h}{\partial \varphi} = \varrho\cos\varphi\cos\vartheta, \quad \dfrac{\partial h}{\partial \vartheta} = -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta.$

e) Mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g(y).$$

f) $\dfrac{\partial A}{\partial c} = m, \quad \dfrac{\partial A}{\partial h} = \dfrac{q}{2}, \quad \dfrac{\partial A}{\partial k} = \dfrac{m}{q}, \quad \dfrac{\partial A}{\partial m} = \dfrac{k}{q} + c, \quad \dfrac{\partial A}{\partial q} = -\dfrac{km}{q^2} + \dfrac{h}{2}.$

5. **a)** Damit die Funktion $x^y = e^{y\ln(x)}$ wohldefiniert ist, empfiehlt es sich, den Bereich $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ zu betrachten. Es gilt für $(x,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= yx^{y-1}, & f_{xy}(x,y) &= x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x \qquad \text{sowie} \\ f_y(x,y) &= x^y\ln x, & f_{yx}(x,y) &= yx^{y-1}\ln x + x^{y-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)$.

b) Die Funktion ist wohldefiniert, solange $xy \neq 1$ ist. Für solche $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gilt:

$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \frac{\frac{\partial}{\partial x}\frac{x+y}{1-xy}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} = \frac{\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \\ &= \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} = \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

und entsprechend $g_y(x,y) = \dfrac{1}{1+y^2}$. Da diese Funktionen nur von x bzw. y abhängen, verschwinden alle gemischten partiellen Ableitungen. *Bemerkung:* Man bemerke, dass als partielle Ableitungen jeweils die Ableitungen des Arcustangens auftreten und in der Tat kann unter Zuhilfenahme des Tangens-Additionstheorems

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan(x) + \arctan(y)$$

herleiten.

6. **a)** Man erhält für die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) &= \frac{2}{2x+2ct} = \frac{1}{x+ct}, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= \frac{2c}{2x+2ct} = \frac{c}{x+ct}. \end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung w_{tt} und w_{xx} ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) &= -\frac{1}{(x+ct)^2}, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) &= -\frac{c^2}{(x+ct)^2}. \end{aligned}$$

Es gilt also $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ (für alle (x,t) mit $x+ct>0$).

b) Man erhält für die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x}(t,x) &= \frac{2}{\cos^2(2x-2ct)}, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= \frac{-2c}{\cos^2(2x-2ct)}. \end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung w_{tt} und w_{xx} ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) &= 2 \cdot \big(-\frac{1}{\cos^4(2x-2ct)}\big) \cdot 2\cos(2x-ct) \cdot (-2\sin(2x-2ct)) \\
&= \frac{8\sin(2x-2ct)}{\cos^3(2x-2ct)}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) &= (-2c) \cdot \big(-\frac{1}{\cos^4(2x-2ct)}\big) \cdot 2\cos(2x-ct) \cdot \big((-2c) \cdot (-\sin(2x-2ct))\big) \\
&= \frac{8c^2\sin(2x-2ct)}{\cos^3(2x-2ct)}.
\end{aligned}$$

Es gilt also $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ (für alle (x,t), für die w definiert ist).

c) Man erhält für die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= -5\sin(3x+3ct) \cdot (3c) + ce^{x+ct}, \\
\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) &= -5\sin(3x+3ct) \cdot 3 + e^{x+ct}.
\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung w_{tt} und w_{xx} ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) &= -5\cos(3x+3ct) \cdot (3c)^2 + c^2 e^{x+ct}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) &= -5\cos(3x+3ct) \cdot 3^2 + e^{x+ct}.
\end{aligned}$$

Es gilt also $w_{tt} = c^2 w_{xx}$

d) Hier ist u eine Funktion, die von x und t abhängt, also $u = u(x,t)$. Mittels Kettenregel ergibt sich für die ersten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(f(u)) &= f'(u)\frac{\partial u}{\partial t} \\
\frac{\partial}{\partial x}(f(u)) &= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned}$$

und mit Produkt- und Kettenregel für die zweiten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f(u)) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right) = f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}(f(u)) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) = f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

Nun ist $u(x,t) = a(x+ct)$ und somit sind die zweiten partiellen Ableitungen u_{tt} und u_{xx} beide identisch gleich 0. Da außerdem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ac \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = a,$$

ist also

$$w_{tt} = f'(u)(ca)^2 = c^2 f'(u)a^2 = c^2 w_{xx},$$

d.h. $f(u)$ ist eine Lösung der Wellengleichung.

e) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= k_1 \frac{\partial f_1}{\partial t}(t,x) + k_2 \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x),\\
\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) &= k_1 \frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) + k_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}(t,x)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t,x) &= k_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2}(t,x) + k_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}(t,x),\\
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t,x) &= k_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(t,x) + k_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(t,x).
\end{aligned}$$

Da nun bereits $(f_1)_{tt} = c^2(f_1)_{xx}$ und $(f_2)_{tt} = c^2(f_2)_{xx}$, folgt:

$$w_{tt} = k_1(f_1)_{tt} + k_2(f_2)_{tt} = k_1c^2(f_1)_{xx} + k_2c^2(f_2)_{xx} = c^2(k_1(f_1)_{xx} + k_2(f_2)_{xx}) = c^2w_{xx},$$

also löst w ebenfalls die Wellengleichung.