Lösung zu Serie 5

1. **a)** i) Die Richtung maximaler Steigung entspricht genau der Richtung, in die der Gradient von f im Punkt $(2,4)$ zeigt. Wir berechnen

$$\nabla f(x,y) = \left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, \frac{y}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

also

$$\nabla f(2,4) = (-1+2, 2+1) = (1,3).$$

Dieser Vektor hat die Länge $\sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}$. Nach Normierung erhalten wir also die Richtung $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

ii) Die Richtung minimaler Steigung bzw. maximalen Gefälles entspricht genau der Richtung, in die der negative Gradient von f im Punkt $(2,4)$ zeigt. Es gilt

$$-\nabla f(2,4) = (-1,-3).$$

Nach Normierung gibt dies $\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3)$.

iii) Die maximale Richtungsableitung von f im Punkt $(2,4)$ ist gleich der Richtungsableitung in die in i) bestimmte Richtung, also

$$\nabla f(2,4) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \sqrt{10},$$

die minimale ist dementsprechend die Richtungsableitung in die in ii) bestimmte Richtung und beträgt damit genau das Negative davon.

iv) Die Änderungsrate von f in einem Punkt ist gegeben durch die Richtungsableitung von f in besagtem Punkt. Wir suchen also eine Richtung $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, so dass

$$D_{\vec{v}} f(2,4) = 0.$$

Dazu berechnen wir die Richtungsableitung

$$D_{\vec{v}} f(2,4) = \nabla f(2,4) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = (1,3) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Wir suchen also genau diejenigen Vektoren, die senkrecht zu $(1,3)$ sind. Diese sind gegeben durch $\pm(3,-1)$. Normiert ergibt dies die Vektoren $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$.

b) Die Länge von $\vec{v}$ ist $|\vec{v}| = \sqrt{3+1} = 2$. Wir berechnen

$$D_{\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}} f(2,4) = \nabla f(2,4) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = (1,3) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+3}{2}.$$

c) i) Es gilt

$$\begin{aligned} h(t) = f(\gamma(t)) &= \frac{e^{-2t}\sin^2 t - e^{-2t}\cos^2 t}{4} + \frac{e^{-2t}\cos t \sin t}{2} \\ &= \frac{e^{-2t}}{4}\left(2\sin t\cos t - \left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\right) = \frac{e^{-2t}}{4}\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right) \end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned} h'(t) &= \frac{e^{-2t}}{4}\left(2\cos(2t) + 2\sin(2t)\right) - \frac{2e^{-2t}}{4}\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right) \\ &= \frac{e^{-2t}}{2}\left(\cos(2t) + \sin(2t) - \sin(2t) + \cos(2t)\right) = e^{-2t}\cos(2t)\,. \end{aligned}$$

ii) Wir schreiben $\gamma(t) = (x(t), y(t))^T$, also

$$x(t) = e^{-t}\cos t \qquad \text{und} \qquad y(t) = e^{-t}\sin t.$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t = -\left(x(t) + y(t)\right), \\ \dot{y}(t) &= -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t = x(t) - y(t) \end{aligned}$$

sowie

$$f_x(x,y) = -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -\frac{x-y}{2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{y}{2} + \frac{x}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

Nach der Kettenregel ist somit

$$\begin{aligned} h'(t) &= f_x(x(t), y(t))\dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t))\dot{y}(t) \\ &= \frac{\left(x(t) - y(t)\right)\left(x(t) + y(t)\right)}{2} + \frac{\left(x(t) + y(t)\right)\left(x(t) - y(t)\right)}{2} \\ &= \frac{x(t)^2 - y(t)^2}{2} + \frac{x(t)^2 - y(t)^2}{2} = x(t)^2 - y(t)^2 \\ &= e^{-2t}\cos^2 t - e^{-2t}\sin^2 t = e^{-2t}\cos(2t)\,. \end{aligned}$$

2. Dies ist eine Anwendung des Implizite-Funktionen-Satzes.
Für $f(x,y) = x^3 + 2y^3 + xy - 4$ gelten

$$f_x(x,y) = 3x^2 + y \qquad \text{und} \qquad f_y(x,y) = x + 6y^2,$$

also insbesondere $f_x(2,-1) = 11$ und $f_y(2,-1) = 8$.

a) Ja, da $f_y(2,-1) \neq 0$, lässt sich die Kurve in einer Umgebung des Punktes $(2,-1)$ als Graph einer Funktion $y = y(x)$ darstellen und es gilt $y'(2) = -\dfrac{f_x(2,-1)}{f_y(2,-1)} = -\dfrac{11}{8}$.

b) Ja, da $f_x(2,-1) \neq 0$ lässt sich die Kurve in einer Umgebung des Punktes $(2,1)$ als Graph einer Funktion $x = x(y)$ darstellen und es gilt $x'(-1) = -\dfrac{f_y(2,-1)}{f_x(2,-1)} = -\dfrac{8}{11}$.

3. Wir berechnen

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial r},$$

wobei in Koordinaten $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = \frac{e^\theta}{r}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= 1 + y\big|_{y=r\sin\theta} = 1 + r\sin\theta \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= x\big|_{x=r\cos\theta} = r\cos\theta \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= -2z\big|_{z=\frac{e^\theta}{r}} = -2\frac{e^\theta}{r}.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= (1 + r\sin\theta)\cdot\cos\theta + (r\cos\theta)\cdot\sin\theta + \left(-2\frac{e^\theta}{r}\right)\cdot\frac{-e^\theta}{r^2} \\
&= \cos\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + 2\frac{e^{2\theta}}{r^3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial \theta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta} \\
&= (1 + r\sin\theta)\cdot(-r\sin\theta) + (r\cos\theta)\cdot(r\cos\theta) + \left(-2\frac{e^\theta}{r}\right)\cdot\frac{e^\theta}{r} \\
&= -r\sin\theta - r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - 2\frac{e^{2\theta}}{r^2}.
\end{aligned}$$

4. **a)** Die Funktion $f(x(t), y(t), z(t))$ hat dort kritische Punkte, wo die erste Ableitung von f bezüglich t verschwindet, also an den Stellen, an denen

$$\frac{df}{dt} = f_x\cdot\frac{dx}{dt} + f_y\cdot\frac{dy}{dt} + f_z\cdot\frac{dz}{dt} \stackrel{!}{=} 0.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \cos t\cdot(-\sin t) + \sin t\cdot\cos t + (t^2 + t - 2)\cdot 1 \\
&= t^2 + t - 2 = (t+2)(t-1)
\end{aligned}$$

und erhalten somit $t = -2$ oder $t = 1$. Diese Werte entsprechen genau den Punkten

$$(\cos(-2), \sin(-2), -2) \quad \text{und} \quad (\cos(1), \sin(1), 1).$$

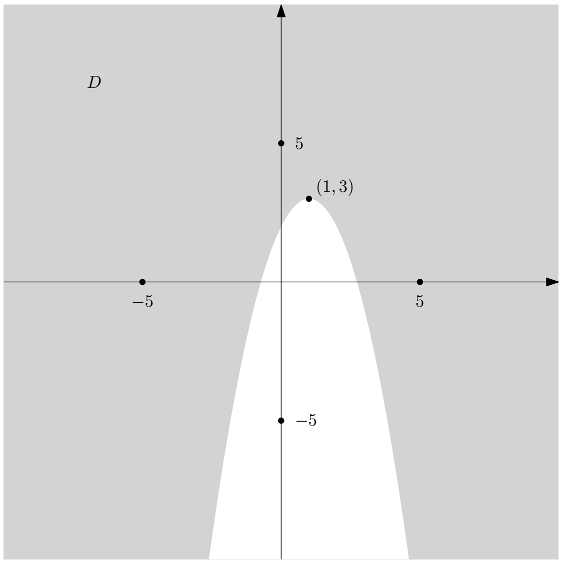
b) Die partiellen Ableitungen bezüglich x, y und z sind gegeben durch

$$f_x = x, \quad f_y = y, \quad f_z = z^2 + z - 2.$$

Eine mögliche Funktion ist also

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} - 2z.$$

5. **a)** Da $\ln(z)$ nur für $z > 0$ definiert ist, ist die Funktion nur für $(x-1)^2 + y - 3 > 0$ erklärt. Hier handelt es sich um eine offene Bedingung, daher ist der Definitionsbereich offen. Der Definitionsbereich D der Funktion wird also von der Parabel $y = -(x-1)^2 + 3$ begrenzt. Daher ist der Rand des Definitionsbereiches genau die durch die Gleichung $y = -(x-1)^2 + 3$ beschriebene Parabel.



b) Es gelten

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y-3}, \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{(x-1)^2+y-3} - 1 = \frac{4-(x-1)^2-y}{(x-1)^2+y-3}, \end{aligned} \tag{1}$$

also insbesondere $f_x(0,4) = -1$ und $f_y(0,4) = -1/2$ bzw.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y-3} \\ \frac{4-(x-1)^2-y}{(x-1)^2+y-3} \end{pmatrix} \text{ und } \nabla f(0,4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

c) Die Niveaulinie von f durch den Punkt $(0,4)$ gehört zum Wert

$$f(0,4) = \ln(2) - 4.$$

d) Wir suchen die Tangente an die ebene Kurve, welche durch die Gleichung

$$\ln\big((x-1)^2 + y - 3\big) = f(0,4) = \ln(2) - 4$$

gegeben ist. Insbesondere steht die gesuchte Tangente normal zu $\begin{pmatrix} f_x(0,4) \\ f_y(0,4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und verläuft durch den Punkt $(0,4)$. Die Tangente ist also gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und somit

$$2x + y = 4.$$

e) Die Tangentialebene ist durch

$$\begin{aligned} z &= f(0,4) + f_x(0,4)(x-0) + f_y(0,4)(y-4) \\ &= \ln 2 - 4 - x - \frac{y-4}{2} = \frac{\ln 4 - 4 - 2x - y}{2}, \end{aligned}$$

also $2x + y + 2z = \ln 4 - 4$ gegeben.

f) Die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt (a,b) ist gegeben durch

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Diese Ebene ist parallel zur xy-Ebene, wenn diese Gleichung von der Form $z =$Konstant ist. In solchen Punkten (x,y) gilt also $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$. Nach (1) folgt daraus

$$0 = x - 1 \qquad \text{und} \qquad 0 = 4 - (x-1)^2 - y.$$

Es gibt also nur den Punkt $(1,4)$.

g) Eine quadratische Näherung ist gegeben durch das Taylorpolynom 2. Ordnung von f an der Stelle $(0,3)$

$$\begin{aligned} T_{f;(0,3)}(x,y) = f(0,3) &+ f_x(0,3)x + f_y(0,3)(y-3) \\ &+ \frac{1}{2}\left(f_{xx}(0,3)x^2 + 2f_{xy}(0,3)x(y-3) + f_{yy}(y-3)^2\right). \end{aligned}$$

Dazu brauchen wir

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + y - 3}, \\ f_y(x,y) &= \frac{1}{(x-1)^2 + y - 3} - 1 \\ f_{xx}(x,y) &= \frac{-2(x-1)^2 + 2y - 6}{((x-1)^2 + y - 3)^2} \\ f_{yy}(x,y) &= \frac{-1}{((x-1)^2 + y - 3)^2} \\ f_{xy}(x,y) &= \frac{-1}{((x-1)^2 + y - 3)^2} \cdot 2(x-1). \end{aligned}$$

Dann sind

$$\begin{aligned} &f(0,3) = \ln(1) - 3 = -3, \quad &&f_x(0,3) = -2, \quad &&f_y(0,3) = 0, \\ &f_{xx}(0,3) = -2, &&f_{yy}(0,3) = -1, &&f_{xy}(0,3) = 2 \end{aligned}$$

und somit das Polynom gegeben durch

$$\begin{aligned} T_{f;(0,3)}(x,y) &= -3 - 2x + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + 4x(y-3) - (y-3)^2\right) \\ &= -3 - 2x - x^2 + 2x(y-3) - \frac{1}{2}(y-3)^2 \\ &= -3 - 2x - x^2 + 2xy - 6x - \frac{1}{2}y^2 + 3y - \frac{9}{2} \\ &= -x^2 - 8x + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + 3y - \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

6. **a)** Es gelten

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\, e^{y\ln(\sin x)} = y\,\frac{\cos x}{\sin x}\, e^{y\ln(\sin x)} = y\,(\sin(x))^{y-1}\cos(x),$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\, e^{y\ln(\sin x)} = \ln(\sin x)\, e^{y\ln(\sin x)} = (\sin(x))^{y}\ln(\sin(x))$$

und da $\sin(\pi/6) = 1/2$ und $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$ sind

$$f_x(\pi/6,2) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^1 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad f_y(\pi/6,2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \ln\frac{1}{2} = -\frac{\ln 2}{4}.$$

Die lineare Näherung ist somit

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f\left(\frac{\pi}{6},2\right) + f_x(\pi/6,2)\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + f_y(\pi/6,2)\,(y-2) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\ln 2}{4}\,(y-2) \end{aligned}$$

b) Wir schätzen die Änderung mit Hilfe des totalen Differentials

$$\begin{aligned} df\left(\frac{\pi}{6},2\right) &= f_x\left(\frac{\pi}{6},2\right)dx + f_y\left(\frac{\pi}{6},2\right)dy \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} + \frac{-\ln(2)}{4}\cdot(-0.02) \approx 0.018581, \end{aligned}$$

wobei wir $f_x\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ und $f_y\left(\frac{\pi}{6},2\right)$ aus den vorherigen Teilaufgaben bereits wissen.

c) Für $(x,y) = (62\pi/360, 1.98) = (\pi/6+\pi/180, 2+(-0.02))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f\left(\frac{62\pi}{360},1.98\right) &\approx f\left(\frac{\pi}{6},2\right) + df\left(\frac{\pi}{6},2\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} + \frac{\ln 2}{4}\frac{2}{100} \\ &\approx \frac{1}{4} + 0.018581 = 0.268581, \end{aligned}$$

wobei wir die Näherung aus **b)** verwendet haben.