Lösung zu Serie 6

1. **a)** In einem kritischen Punkt (x, y) von f gelten

$$f_x(x, y) = -2x + y - 2 = 0 \text{ und } f_y(x, y) = x - 2y - 2 = 0,$$

also $x = y = -2$. Ferner gelten

$$f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = -2 \text{ und } f_{xy}(x, y) = 1,$$

insbesondere also $f_{xx}(-2, -2) < 0$ und

$$f_{xx}(-2, -2)f_{yy}(-2, -2) - f_{xy}(-2, -2)^2 = 3 > 0.$$

Somit besitzt f in $(-2, -2)$ ein lokales Maximum.

b) In einem kritischen Punkt (x, y) von g gelten

$$\begin{aligned} g_x(x, y) &= 3x^2 + 3y = 3\left(x^2 + y\right) = 0 \qquad \text{und} \\ g_y(x, y) &= 3y^2 + 3x = 3\left(y^2 + x\right) = 0, \end{aligned}$$

also $x^4 + x = x(x^3 + 1) = 0$ und $y = -x^2$. Die kritischen Punkte der Funktion g sind also $(0, 0)$ und $(-1, -1)$. Ferner gelten

$$g_{xx}(x, y) = 6x, \quad g_{yy}(x, y) = 6y \qquad \text{und} \qquad g_{xy}(x, y) = 3.$$

Wegen $g_{xx}(0, 0)g_{yy}(0, 0) - g_{xy}(0, 0)^2 = -9 < 0$ besitzt f im Ursprung einen Sattepunkt und wegen $g_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$ und

$$g_{xx}(-1, -1)g_{yy}(-1, -1) - g_{xy}(-1, -1)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

ein lokales Maximum im Punkt $(-1, -1)$.

c) In einem kritischen Punkt (x, y) von h gelten

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= 10xe^{-x^2-y^2} - 2x\left(5x^2 + 7y^2\right)e^{-x^2-y^2} \\ &= 2\left(5 - 5x^2 - 7y^2\right)xe^{-x^2-y^2} = 0 \qquad \text{und} \\ h_y(x, y) &= 14ye^{-x^2-y^2} - 2y\left(5x^2 + 7y^2\right)e^{-x^2-y^2} \\ &= 2\left(7 - 5x^2 - 7y^2\right)ye^{-x^2-y^2} = 0. \end{aligned}$$

Ist $x = 0$, so muss $y = 0$ oder $y = \pm 1$ sein. Ist $y = 0$, so muss $x = 0$ oder $x = \pm 1$ sein. Die Funktion hat also die kritischen Punkte

$$(0, 0), \quad (0, 1), \quad (0, -1), \quad (1, 0) \quad \text{und} \quad (-1, 0).$$

Da die Funktion für $(x, y) \neq (0, 0)$ stets positiv ist und im Ursprung verschwindet, nimmt sie dort offenbar ihr globales Minimum an.

Ferner gelten

$$\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= \big((20x^2-50)x^2+(28x^2-14)y^2+10\big)\,e^{-x^2-y^2},\\
h_{yy}(x,y) &= \big((20y^2-10)x^2+(28y^2-70)y^2+14\big)\,e^{-x^2-y^2},\\
h_{xy}(x,y) &= \big(20x^2+28y^2-48\big)\,xye^{-x^2-y^2}.
\end{aligned}$$

In den kritischen Punkten gilt also $h_{xy}(x,y)=0$.

Ist $x=0$ und $y=\pm1$, so sind

$$\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= (10-14)\,e^{-1} = -4/e,\\
h_{yy}(x,y) &= ((28-70)+14)\,e^{-1} = -28/e.
\end{aligned}$$

Also sind $(0,1)$ und $(0,-1)$ lokale Maximalstellen.

Ist $y=0$ und $x=\pm1$, so sind

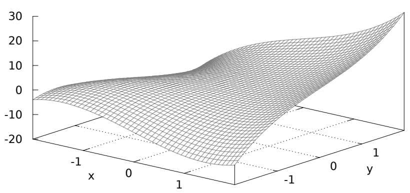
$$\begin{aligned}
h_{xx}(x,y) &= ((20-50)+10)\,e^{-1} = -20/e,\\
h_{yy}(x,y) &= (14-10)\,e^{-1} = 4/e.
\end{aligned}$$

Also sind $(1,0)$ und $(-1,0)$ Sattelpunkte.

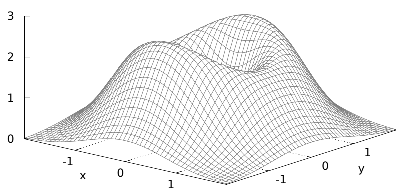
d) Es gelten

$$\phi_x(x,y) = 2e^{2x}\cos y \qquad \text{und} \qquad \phi_y(x,y) = -e^{2x}\sin y.$$

Wegen $e^x>0$ und $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $x\in\mathbb{R}$, besitzt ϕ also keine kritischen Punkte. Insbesondere nimmt ϕ keine lokalen Extrema an und keine Sattelpunkte.



Graph der Funktion g



Graph der Funktion h

2. **a)** Die Einschränkungen

$$x \mapsto f(x,0) = 3\,x^4 \qquad \text{und} \qquad y \mapsto f(0,y) = y^2$$

von f auf die x- bzw. y-Achse nehmen offenbar ihr globales Minimum in 0 an.

Jede von der y-Achse verschiedene Gerade erfüllt $y = m\,x$ für ein $m \in \mathbb{R}$. Man sieht leicht, dass die Einschränkung auf jede solche Gerade die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned}\phi(x) &= f(x,mx) = 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2\\ \phi'(x) &= 12x^3 - 12mx^2 + 2m^2x\\ \phi''(x) &= 36x^2 - 24mx + 2m^2\end{aligned}$$

erfüllt und somit einen kritischen Wert in 0 annimmt, bei dem es sich wegen

$$\phi''(0) = 2m^2 > 0 \qquad \text{für} \quad m \neq 0$$

um ein Minimum handelt. (Und die x-Achse, für die $m = 0$ gilt, wurde ja bereits zu Beginn gesondert betrachtet.)

Alternativ sieht man auch leicht direkt ein, dass wegen

$$\begin{aligned}f(x,m\,x) &= 3\,x^4 - 4\,m\,x^3 + m^2\,x^2 = x^2\left(3\,x^2 - 4\,m\,x + m^2\right)\\ &= x^2(x-m)(3\,x-m) \quad \begin{cases} > 0 & \text{für } x \in (-\infty,0) \cup \left(0,\frac{m}{3}\right) \text{ falls } m > 0\ ,\\ > 0 & \text{für } x \in \left(\frac{m}{3},0\right) \cup (0,\infty) \text{ falls } m < 0\ ,\end{cases}\end{aligned}$$

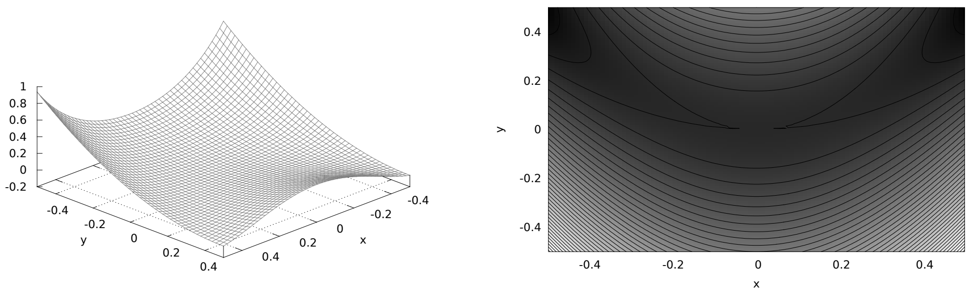
jede solche Einschränkung im Ursprung ein lokales Minimum annimmt.

b) Es gilt

$$f(x,3\,x^2/2) = 3\,x^4 - 6\,x^4 + \frac{9}{4}\,x^4 = -\frac{3}{4}\,x^4$$

Offenbar ist $f(x,3\,x^2/2) < 0$ für $x \neq 0$, daher nimmt f eingeschränkt auf die Parabel $y = 3\,x^2/2$ im Ursprung ihr globales Maximum an.

c) Vom Ursprung abgesehen ist die Funktion f also auf den Koordinatenachsen stets positiv, auf der der Parabel $y = \frac{3}{2}\,x^2$ dagegen stets negativ. Somit nimmt f in jeder Umgebung des Ursprungs sowohl positive als auch negative Werte an. Ein kritischer Punkt mit der Eigenschaft, dass in jeder noch so kleinen Umgebung sowohl größere als auch kleinere Funktionswerte angenommen werden, wird als Sattelpunkt bezeichnet. Die vorigen beiden Aufgabenteile belegen, dass f in $(0,0)$ einen Sattelpunkt hat.



Graph und Niveaulinienportrait der Funktion f aus Aufgabe 2.

3. a) Da die Menge A beschränkt und abgeschlossen und die Funktion f stetig ist, nimmt f auf A einen grössten und einen kleinsten Wert an. Für kritische Punkte (x, y) im Innern von A gilt

$$0 = f_x(x, y) = 2x - 2 = f_y(x, y) = -2y + 4,$$

also $x = 1$ und $y = 2$. Wegen $f_{xx} = -f_{yy} = 2$ und $f_{xy} = 0$ handelt es sich bei dem kritischen Punkt $(1, 2)$ um einen Sattelpunkt.

Die Einschränkung der Funktion f auf die x-Achse

$$f(x, 0) = x^2 - 2x = x(x - 2), \qquad -2 \leq x \leq 2,$$

nimmt an dem Randpunkt $(-2, 0)$ das Maximum 8, im Punkt $(1, 0)$ das Minimum -1 an. Die Einschränkung auf die Gerade $x = 2$

$$f(2, y) = -y^2 + 4y = y(4 - y), \qquad 0 \leq y \leq 4$$

nimmt an den Randpunkten $(2, 0)$ und $(2, 4)$ das Minimum 0, im Punkt $(2, 2)$ das Maximum 4 an. Die Einschränkung auf die Gerade $y = x + 2$,

$$f(x, x + 2) = 4 - 2x, \qquad -2 \leq x \leq 2,$$

nimmt keine inneren Extrema an. Das Maximum liegt bei $(-2, 0)$, das Minimum bei $(2, 4)$.

Also nimmt f auf dem Bereich A

- das globale Maximum 8 im Punkt $(-2, 0)$ und
- das globale Minimum -1 im Punkt $(1, 0)$ an

und

- hat einen Sattelpunkt bei $(1, 2)$.

b) Da die Menge B beschränkt und abgeschlossen und die Funktion g stetig ist, nimmt g auf B einen grössten und einen kleinsten Wert an. Für kritische Punkte (x, y) im Innern von B müssten

$$0 = g_x(x, y) = \cos x \sin y,$$
$$0 = g_y(x, y) = \sin x \cos y$$

gelten. Wegen $0 < x, y, x + y < \pi$ gibt es also keine solchen Punkte.

Da ferner die Funktion g auf B nicht negativ ist und die Einschränkungen von g auf die x- und die y-Achse verschwinden, so nimmt sie dort ihr globales Minimum und ihr globales Maximum auf dem Geradenstück $y = \pi - x$, $0 \leq x \leq \pi$, an. Die Einschränkung auf dieses ist durch

$$\phi(x) = g(x, \pi - x) = \sin x \sin(\pi - x) = \sin^2 x, \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

gegeben und besitzt wegen

$$\phi'(x) = \sin(2x) \qquad \text{und} \qquad \phi''(x) = 2\cos(2x)$$

ein Maximum bei $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Die Funktion g nimmt also auf dem Bereich B

- das globale Maximum 1 im Punkt $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ und
- das globale Minimum 0 in denjenigen Punkten des Randes an, die auf (wenigstens) einer der Koordinatenachsen liegen (d.h. für die $xy = 0$ gilt).

c) Wiederum besitzt h als stetige Funktion auf der abgeschlossenen und beschränkten Kreisscheibe C Maximum und Minimum. Für einen kritischen Punkt im Inneren von C muss gelten, dass

$$0 = \nabla h(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \end{pmatrix},$$

was genau für alle (x, y) mit $x = 0$ gilt. Da für $y > 0$ auch $h(x, y) \geq 0$ und $h(0, y) = 0$, ist $(0, y)$ ein lokales Minimum für h. Umgekehrt ist $h(0, y) \leq 0$ für $y < 0$ und somit $(0, y)$ ein lokales Maximum. $(0, 0)$ ist ein Sattelpunkt, da in einer beliebig kleinen Umgebung sowohl Punkte (x, y) mit $x \neq 0$ und $y > 0$ liegen (für die $h(x, y) > 0$ ist) als auch Punkte mit $x \neq 0$ und $y < 0$ liegen (für die $h(x, y) < 0$ ist).

Das Verhalten von h auf dem Rand von C kann durch das Studium der verketteten Funktion $h(\cos(t), \sin(t)) = \cos^2(t) \sin(t)$ ermittelt werden. Wegen

$$h'(t) = -2\cos(t)\sin^2(t) + \cos^3(t) = \cos(t)\big(\cos^2(t) - 2\sin^2(t)\big)$$

hat h genau dann einen kritischen Punkt, wenn $\cos(t) = 0$ (also wenn $t = \frac{\pi}{2}$ oder $t = \frac{3\pi}{2}$ ist) oder $0 = \cos^2(t) - 2\sin^2(t) = 3\cos^2(t) - 2$ (also wenn $\cos(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$).

Aufgrund von

$$\begin{aligned} h''(t) &= 2\sin^3(t) - 7\sin(t)\cos^2(t) = \sin(t)\big(2\sin^2(t) - 7\cos^2(t)\big) \\ &= \sin(t)\begin{cases} 2, & \cos(t) = 0, \\ -4, & \cos(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

sind die kritischen Punkte

- lokale Minima für $t = \frac{\pi}{2}$ und t mit $\cos(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin(t) = -\sqrt{\frac{1}{3}}$
- lokale Maxima für $t = \frac{3\pi}{2}$ und t mit $\cos(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sin(t) = \sqrt{\frac{1}{3}}$.

Durch Vergleichen der Funktionswerte von h ergibt sich, dass die lokalen Maxima bzw. Minima globale Maxima bzw. Minima auf dem Rand sind. Da die lokalen Maxima/Minima im Inneren stets den Funktionswert 0 aufweisen, hat h auf C

- globale Maxima bei $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$
- globale Minima bei $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$
- lokale Minima bei $(0, y)$ für $0 < y \leq 1$
- lokale Maxima bei $(0, y)$ für $-1 \leq y < 0$
- einen Sattelpunkt bei $(0, 0)$.

4. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir:

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\iint_Q e^{x+y}\,dx\,dy\\
&= \iint_Q e^x\,e^y\,dx\,dy\\
&= \int_0^1 \int_0^1 e^x\,e^y\,dx\,dy\\
&= \int_0^1 e^x\,dx \int_0^1 e^y\,dy\\
&= e^x\big|_{x=0}^1\, e^y\big|_{y=0}^1\\
&= (e-1)^2\,.
\end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy\\
&= \iint_Q x^2\,\frac{1}{1+y^2}\,dx\,dy\\
&= \int_0^1 x^2\,dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy\\
&= \frac{x^3}{3}\bigg|_{x=0}^1 \arctan y\big|_{y=0}^1\\
&= \frac{1}{3}\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2}\,dx\,dy\\
&= -\int_0^1 \frac{1}{x+y+1}\bigg|_{x=0}^1 dy = \int_0^1 \frac{1}{y+1}\,dy - \int_0^1 \frac{1}{y+2}\,dy\\
&= \ln(y+1)\big|_{y=0}^1 - \ln(y+2)\big|_{y=0}^1 = \ln\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

d) Wir integrieren zum Beispiel zuerst nach y:

$$\begin{aligned}
\iint_Q \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\,dy\,dx\\
&= \int_0^1 \frac{-x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\bigg|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\right) dx\\
&= \left[\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2+x^2}\right]_{x=0}^{x=1} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1.
\end{aligned}$$

5. **a)** Die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = x^3$ und $y = 8$ sind bei $(0,0)$ und $(x,y) = (2,8)$.

i) Deshalb gilt

$$0 \le x \le 2, \quad x^3 \le y \le 8.$$

ii) Offenbar wird x von 0 bis zum Rand der Kurve $y = x^3$ integriert, dann ist $x = y^{\frac{1}{3}}$ und somit

$$0 \le y \le 8, \quad 0 \le x \le y^{\frac{1}{3}}.$$

Man kann die Richtigkeit dieser Grenzen überprüfen, indem man die Integrale berechnet

$$\int_0^2 \int_{x^3}^8 1\,dy\,dx = \int_0^8 \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} 1\,dx\,dy = 12.$$

b) Die Schnittpunkte der beiden Kurven $x = 3$ und $y = 2x$ sind bei $(0, 0)$ und $(x, y) = (3, 6)$.

i) Dann gilt
$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2x.$$

ii) Es wird x vom Rand der Kurve $y = 2x$, also $x = \frac{1}{2}y$, bis zu $x = 3$ integriert und somit gilt
$$0 \leq y \leq 6, \quad \frac{1}{2}y \leq x \leq 3.$$

Wieder kann man nachprüfen, dass
$$\int_0^3 \int_0^{2x} 1\, dy\, dx = \int_0^6 \int_{\frac{y}{2}}^3 1\, dx\, dy = 9.$$

c) Die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = x^2$ und $y = 3x$ sind bei $(0, 0)$ und $(x, y) = (3, 9)$.

i) Dann ist $0 \leq x \leq 3, \quad x^2 \leq y \leq 3x$.

ii) Es wird x zwischen dem Rand der Kurven $y = 3x$, also $x = \frac{1}{3}y$, und $y = x^2$, also $x = \sqrt{y}$, integriert. Dann ist
$$0 \leq y \leq 9, \quad \frac{1}{3}y \leq x \leq \sqrt{y}.$$

Wieder kann man nachprüfen, dass
$$\int_0^3 \int_{x^2}^{3x} 1\, dy\, dx = \int_0^9 \int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} 1\, dx\, dy = \frac{9}{2}.$$

d) Der Schnittpunkt der beiden Kurven $y = e^x$ und $x = 2$ ist bei $(x, y) = (2, e^2)$.

i) $0 \leq x \leq 2, \quad 1 \leq y \leq e^x$.

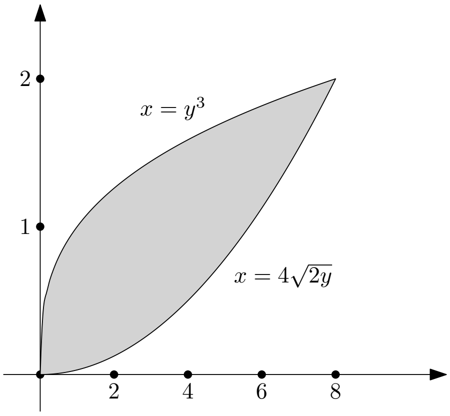
ii) Es wird x zwischen dem Rand der Kurven $y = e^x$, also $x = \ln y$, und $x = 2$ integriert. Somit ist
$$1 \leq y \leq e^2, \quad \ln y \leq x \leq 2.$$

Wieder kann man nachprüfen, dass
$$\int_0^2 \int_1^{e^x} 1\, dy\, dx = \int_1^{e^2} \int_{\ln y}^2 1\, dx\, dy = e^2 - 3.$$

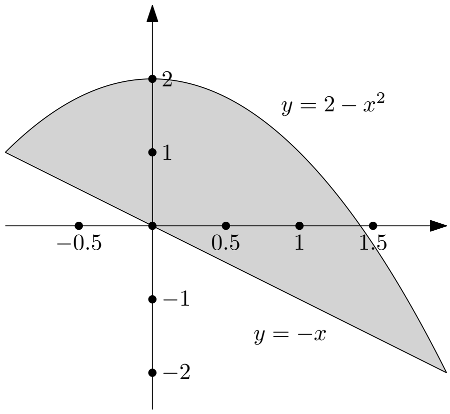
6. **a)** Die Integrationsgebiete sehen wie folgt aus:

b) **i)** Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)
$$\begin{aligned}&\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq 2,\, y^3 \leq x \leq 4\sqrt{2y}\}\\ &\quad = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 8,\, x^2/32 \leq y \leq \sqrt[3]{x}\}\end{aligned}$$

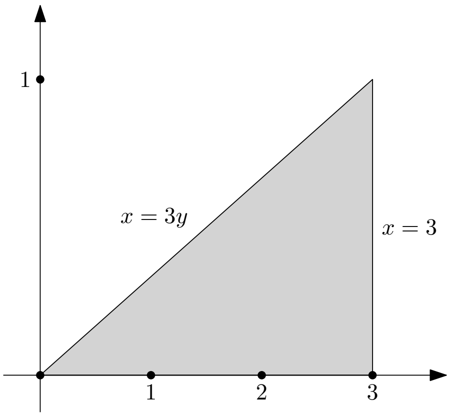
und damit $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\, dy\, dx.$



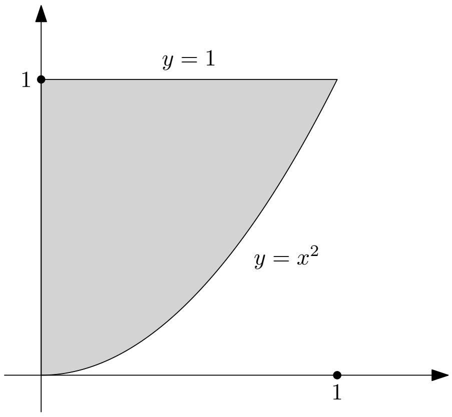
Das Integrationsgebiet in **i)**



Das Integrationsgebiet in **ii)**



Das Integrationsgebiet in **iii)**



Das Integrationsgebiet in **iv)**

ii) Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\begin{aligned}
&\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x \leq 2,\ -x \leq y \leq 2 - x^2\} \\
&\quad = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -2 \leq y \leq 1,\ -y \leq x \leq \sqrt{2-y}\} \\
&\qquad \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2,\ -\sqrt{2-y} \leq x \leq \sqrt{2-y}\}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{2} \int_{-x}^{2-x^2} g(x,y)\,dy\,dx &= \int_{-2}^{1} \int_{-y}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy + \int_{1}^{2} \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int_{-2}^{2} \int_{\max\{-y,-\sqrt{2-y}\}}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

iii) Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\begin{aligned}&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 1,\, 3y\le x\le y\}\\ &\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 3,\, 0\le y\le x/3\},\end{aligned}$$

und damit $\displaystyle\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy=\int_0^3\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx.$

iv) Es gilt (vgl. die Skizze in **a)**)

$$\begin{aligned}&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\, x^2\le y\le 1\}\\ &\quad=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le 1,\, 0\le x\le \sqrt{y}\},\end{aligned}$$

und damit $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\,dy\,dx=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^3\sin y^3\,dx\,dy.$

c) iii) Wir integrieren zuerst über y. Nach **b)** gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy&=\int_0^3\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx=\int_0^3\frac{x}{3}e^{x^2}\,dx\\ &=\frac{1}{6}\int_0^3 2xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{6}\,e^{x^2}\Big|_0^3=\frac{1}{6}\left(e^9-1\right).\end{aligned}$$

Bemerkung: Der Integrand $x\mapsto e^{x^2}$ besitzt keine Stammfunktion, die sich mithilfe von elemetaren Funktionen darstellen lässt.

iv) Wir integrieren zuerst über x. Nach **b)** gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{x^2}^1 x^3\sin y^3\,dy\,dx&=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y}} x^3\sin y^3\,dx\,dy\\ &=\int_0^1\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\sqrt{y}}\sin y^3\,dy=\frac{1}{12}\int_0^1 3y^2\sin y^3\,dy\\ &=\frac{1}{12}\left(-\cos y^3\right)\Big|_0^1=\frac{1}{12}\left(1-\cos 1\right)\end{aligned}$$

Bemerkung: Auch hier ist die ursprüngliche Integrationsreihenfolge unangebracht, da der Integrand $y\mapsto\sin y^3$ keine Stammfunktion besitzt, die sich mithilfe von elementaren Funktionen darstellen lässt.