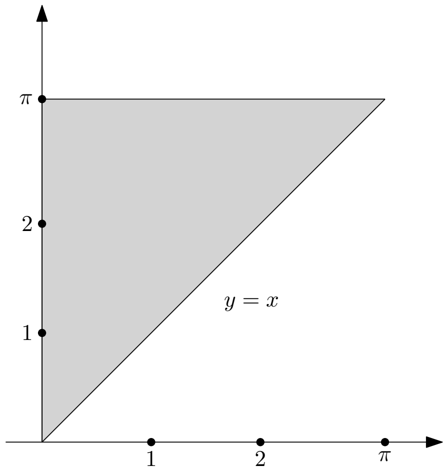
Lösung zu Serie 7

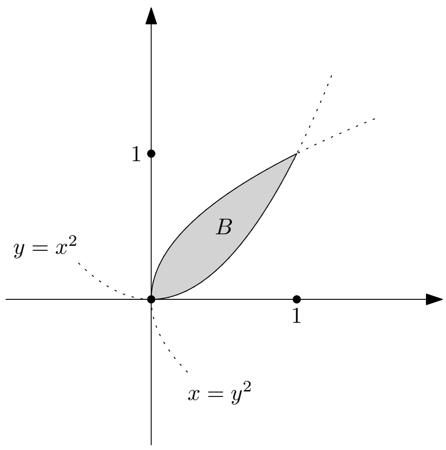
1. a) Es gilt (vgl. auch Figur): Es gilt (vgl. auch Figur): y läuft von 0 (wo sich $y = x$ und $y = 0$ treffen bis π (wo sich $y = \pi$ und $x = 0$ treffen. Für jedes y zwischen 0 und π haben die Punkte in A x-Koordinate zwischen 0 und y. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
&\iint_A \cos(x+y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^{\pi} \sin(x+y)\Big|_{x=0}^{x=y}\,dy \\
&\quad = \int_0^{\pi} (\sin(2y) - \sin(y))\,dy \\
&\quad = \left(-\frac{\cos(2\,y)}{2} + \cos(y)\right)\Bigg|_{y=0}^{y=\pi} = -2.
\end{aligned}$$



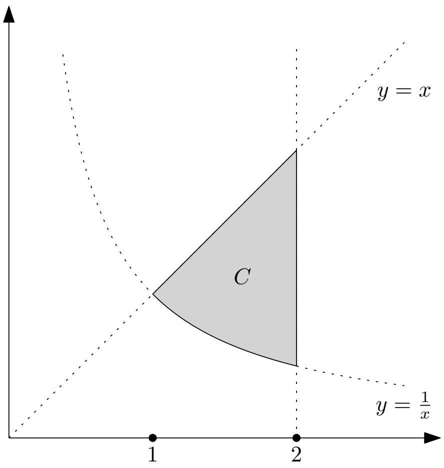
b) Die beiden Parabeln schneiden sich in den Punkten $(0,0)$ und $(1,1)$. Das von ihnen gemeinsam berandete Gebiet besteht somit (und unter Zuhilfenahme der Abbildung unten) aus all den Punkten (x,y), für die $0 \leq y \leq 1$ und $y^2 \leq x \leq \sqrt{y}$ gilt. Dies führt zu:

$$\begin{aligned}
&\iint_B (x^2+y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx\,dy \\
&\quad = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + xy\right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy \\
&\quad = \int_0^1 \left(\frac{4\,y^{3/2}}{3} - \frac{y^6}{3} - y^3\right) dy \\
&\quad = \left(\frac{8\,y^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{y^7}{21} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{y=0}^{1} = \frac{33}{140}.
\end{aligned}$$



c) Es gilt (vgl. Figur): Die Kurven $xy = 1$ und $y = x$ schneiden sich in $(1,1)$ und die Schnittpunkte von $xy = 1$ bzw. $y = x$ mit $x = 2$ sind $(2, \frac{1}{2})$ und $(2,2)$ respektive. Mit Blick auf die Figur ist es hier einfacher, wenn die äußere Integration diejenige nach x ist. Für die Punkte in C gilt $1 \leq x \leq 2$ und $\frac{1}{x} \leq y \leq x$.

$$\begin{aligned}
&\iint_C \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_1^2 \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,dy\,dx \\
&= \int_1^2 -\frac{x^2}{y}\Big|_{y=\frac{1}{x}}^{x}\,dx \\
&= \int_1^2 (x^3 - x)\,dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{x=1}^{2} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

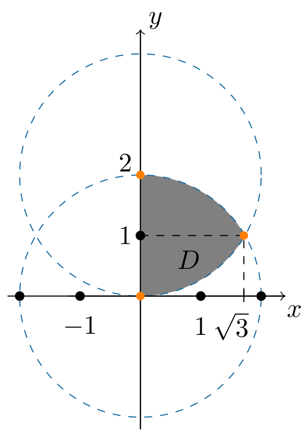


d) Es gilt (vgl. Figur unten): Der Schnittpunkt der beiden Kreise im 1. Quadranten lautet $(\sqrt{3}, 1)$. Ein Punkt (x, y) liegt genau dann in C, wenn

$$0 \leq x \leq \sqrt{3} \text{ und } 2 - \sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

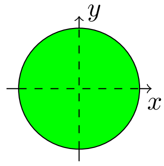
Daher ist es wieder komfortabler, zuerst nach y und dann nach x zu integrieren. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\iint_D 2xy\,dx\,dy &= \int_0^{\sqrt{3}} \int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 2xy\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} xy^2\Big|_{y=2-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}}\,dx \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} x(4\sqrt{4-x^2} - 4)\,dx = \int_0^3 2\sqrt{4-t}\,dt - 2x^2\Big|_{x=0}^{x=\sqrt{3}} \\
&= -\frac{4}{3}(4-t)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{t=3} - 6 = -\frac{4}{3} + \frac{32}{3} - 6 = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$



2. **a)** Es ist

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 4\} \\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le r\le 2,\, 0\le\theta\le 2\pi\}. \end{aligned}$$

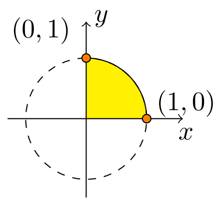


In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \iint_A (1-2\,x-3\,y)\,dx\,dy &= \int_0^2\int_0^{2\,\pi}(1-2\,r\cos\theta-3\,r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr \\ &= \int_0^2 \left[r\theta - 2r^2\sin(\theta)+3r^2\cos(\theta)\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\,dr \\ &= \int_0^2 2\pi r\,dr = \pi r^2\big|_{r=0}^{r=2} = 4\,\pi. \end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2\le 1,\, x,y\ge 0\} \\ &= \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} 0\le r\le 1, \\ r\cos(\theta)\ge 0, \\ r\sin(\theta)\ge 0 \end{array}\right\} \\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le r\le 1,\, 0\le\theta\le\pi/2\}. \end{aligned}$$



In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned} \iint_B e^{x^2+y^2-1}\,dx\,dy &= \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{r^2-1}\,r\,d\theta\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 e^{r^2-1}\,r\,dr \\ &= \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{r^2-1}}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1-1/e}{2} = \frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right). \end{aligned}$$

Dabei wurde in der r-Integration $t=r^2$ impliziert substituiert bzw. gesehen, dass

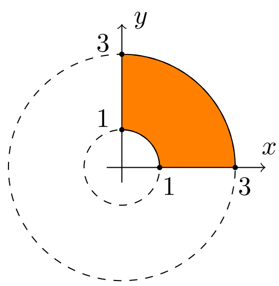
$$re^{r^2-1} = \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{r^2-1}}{2}\right)$$

gilt.

c) Es ist

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1\le x^2+y^2\le 9,\, x,y\ge 0\} \\ &= \left\{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} 1\le r\le 3, \\ 0\le r\cos(\theta), \\ 0\le r\sin(\theta) \end{array}\right\} \\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\ 1\le r\le 3,\, 0\le\theta\le\pi/2\}, \end{aligned}$$

vgl. auch mit **b)**.



In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\iint_C \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\int_1^3 \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3}\,r\,dr\,d\theta\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)\,d\theta = -\left.\frac{\cos(2\theta)}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} = 1.\end{aligned}$$

d) Zunächst ist $\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x$ nur für (x,y) im ersten Quadranten möglich. Wegen $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$ und $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$ und der Tatsache, dass die Bedingung auch als

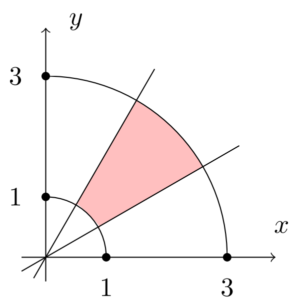
$$\frac{r\cos(\theta)}{\sqrt{3}} \le r\sin(\theta) \le \sqrt{3}r\cos(\theta),$$

was wegen $\cos(\theta),\sin(\theta) \ge 0$ gemäß der vorigen Feststellung zu

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \le \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) \le \sqrt{3}$$

äquivalent ist, geschrieben werden kann, gilt:

$$\begin{aligned}D &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ x/\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}\,x\}\\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\mathbb{R}^2 :\ 1 \le r \le 3,\ \pi/6 \le \theta \le \pi/3\}.\end{aligned}$$



In Polarkoordinaten ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\iint_D \arctan\Big(\frac{y}{x}\Big)\,dx\,dy &= \iint_D \arctan\big(\tan(\theta)\big)\,dx\,dy\\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_1^3 \theta\,r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/3}\theta\,d\theta\int_1^3 r\,dr\\ &= \left.\frac{\theta^2}{2}\right|_{\pi/6}^{\pi/3}\left.\frac{r^2}{2}\right|_1^3 = \frac{\pi^2}{24}4 = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

3. Das gegebene Polyeder hat als Grundfläche das Quadrat mit den Ecken

$$(0,0,0),\ (0,2,0),\ (2,2,0) \text{ und } (2,0,0)$$

in der xy-Ebene als Grundfläche. Von oben wird es begrenzt durch die Ebene

$$E:\ x+y+2z=6$$

und an den vier Seiten durch die xz-Ebene, die yz-Ebene, die Ebene $y=2$ und die Ebene $x=2$. Das abgeschlossene Polyeder P ist damit beschrieben durch die Ungleichungen

$$0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le \frac{6-x-y}{2}.$$

Das Volumen von P ergibt sich als das Integral der Einsfunktion über die Menge P. Dabei gibt es sechs verschiedene Integrationsreihenfolgen, die man wählen kann. Sicherlich bietet es sich bei diesem Integral an, außen über x und y zu integrieren (denn es ist klar, in welchem Bereich x und y unabhängig von einander rangieren: $[0,2]\times[0,2]$) und die Integration über z als innerste Integration auszuführen, aber wir wollen hier der Vollständigkeit halber trotzdem alle möglichen Reihenfolgen durchrechnen.

- **1. Variante:** Integrationsreihenfolge $\mathrm{Vol}(P) = \iiint_P dz\,dy\,dx$.
  Für jedes $(x,y) \in [0,2]\times[0,2]$ sind genau die Punkte (x,y,z) in P, für die $0 \le z \le \frac{6-x-y}{2}$ gilt. Damit ist also

$$\begin{aligned}
\iiint_P dz\,dy\,dx &= \int_0^2\int_0^2\int_0^{\frac{6-x-y}{2}} 1\,dz\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^2 \frac{6-x-y}{2}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2\int_0^2 \Big(3-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\Big)\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[3y-\frac{x}{2}y-\frac{y^2}{4}\right]_0^2 dx = \int_0^2 (6-x-1)\,dx \\
&= \left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 10-2 = 8.
\end{aligned}$$

- **2. Variante:** Integrationsreihenfolge $\mathrm{Vol}(P) = \iiint_P dz\,dx\,dy$.
  Man bemerke, dass das Problem in x und y symmetrisch ist. Deshalb berechnen wir dieses Integral nicht noch einmal. Man erhält genau die gleiche Rechnung wie in Variante 1, einzig x und y sind vertauscht.
- **3. Variante:** Integrationsreihenfolge $\mathrm{Vol}(P) = \iiint_P dx\,dz\,dy$.
  Bei dieser Integrationsreihenfolge rangieren (y,z) im Bereich D, gegeben durch

$$D = \{(y,z):\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3-\frac{y}{2}\}.$$

  Für ein $(y,z) \in D$ ist (x,y,z) genau dann in P, wenn $0 \le x \le \min\{2, 6-2z-y\}$ gilt. Dabei bemerke man, dass $2 \le 6-2z-y$ genau dann gilt, wenn $z \le 2-\frac{y}{2}$ ist. Somit gilt:

$$\begin{aligned}\iiint_P dx\,dz\,dy &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{y}{2}} \int_0^{6-y-2z} 1\,dx\,dz\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^{2-\frac{y}{2}} 2\,dz\,dy + \int_0^2 \int_{2-\frac{y}{2}}^{3-\frac{y}{2}} (6-y-2z)\,dz\,dy \\ &= \underbrace{\int_0^2 (4-y)\,dy}_{=8-\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}=6} + \int_0^2 \underbrace{\left[6z - yz - z^2\right]_{z=2-\frac{y}{2}}^{z=3-\frac{y}{2}}}_{=6-y-(5-y)=1} dy = 6+2=8.\end{aligned}$$

Man vergleiche auch mit der Begründung bei Variante 5. Bis auf die Vertauschung von x und y ist dies die gleiche Situation.

- **4. Variante:** Integrationsreihenfolge $\mathrm{Vol}(P) = \iiint_P dx\,dy\,dz$.
Hier wird im Vergleich zu Variante 3 nur der Bereich D in einer anderen Art und Weise parametrisiert, und zwar ist (y,z) genau dann in D, wenn

$$0 \leq z \leq 3 \text{ und } y \leq \min\{2, 6-2z\} \text{ und } x \leq \min\{2, 6-2z-y\}.$$

Man bemerke, dass $2 \leq 6-2z$ genau dann, wenn $z \leq 2$. Somit ist also für $2 < z \leq 3$ $(x,y,z) \in D$ genau dann, wenn $0 \leq y \leq 6-2z$ und $0 \leq x \leq \min\{2, 6-2z-y\}$. Dabei ist $2 \leq 6-2z-y$ genau dann, wenn $y \leq 4-2z$. Für $z > 2$ ist damit $y < 0$, was nicht zulässig ist. Damit wissen wir schon einmal, dass die Punkte (x,y,z) in D mit $2 < z \leq 3$ diejenigen sind, die $0 \leq y \leq 6-2z$ und $0 \leq x \leq 6-2z-y$ erfüllen.
Für $0 \leq z \leq 2$ wissen wir schon einmal, dass es für jedes $0 \leq y \leq 2$ Punkte $(x,y,z) \in D$ gibt. Dabei rangiert x zwischen 0 und $\min\{2, 6-2z-y\}$. Hierbei ist $2 \leq 6-2z-y$ genau dann, wenn $y \leq 4-2z$. Für $0 \leq z \leq 1$ ist $4-2z \geq 2$ und somit liegt für $z \in [0,1]$ ein Punkt (x,y,z) genau dann in D, wenn $0 \leq y \leq 2$ und $0 \leq x \leq 2$. Für $1 \leq z \leq 2$ ist $4-2z \in [0,2]$ und für $0 \leq y \leq 4-2z$ ist $0 \leq x \leq 2$ zulässig, während für $4-2z \leq y \leq 2$ nur $0 \leq x \leq 6-y-2z$ zulässig ist. Damit ergibt sich (bemerke, dass sich in der Zerlegung in der zweiten Zeile die Ergebnisse der obigen Argumentation widerspiegeln):

$$\begin{aligned}\iiint_P dx\,dy\,dz &= \int_0^3 \int_0^{\min\{2,6-2z\}} \int_0^{\min\{2,6-2z-y\}} 1\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^1 \int_0^2 2\,dy\,dz + \int_1^2 \left(\int_0^{4-2z} 2\,dy\,dz + \int_{4-2z}^2 (6-y-2z)\,dy \right) dz \\ &+ \int_2^3 \int_0^{6-2z} (6-2z-y)\,dy\,dz \\ &= 4 + \int_1^2 (8-4z)\,dz + \int_1^2 \left[6y - \frac{y^2}{2} - 2zy\right]_{y=4-2z}^{y=2} dz \\ &+ \int_2^3 \left[6y - \frac{y^2}{2} - 2zy\right]_{y=0}^{y=6-2z} dz\end{aligned}$$

$$= \underbrace{4 + 8 - \left[2z^2\right]_{z=1}^{z=2}}_{=6} + \int_1^2 \underbrace{\big(6(2z-2) - (z-1)(6-2z) - 2z(2z-2)\big)}_{=-2z^2+8z-6} dz$$

$$+ \int_2^3 \underbrace{\left(6(6-2z) - \frac{(6-2z)^2}{2} - 2z(6-2z)\right)}_{=\frac{1}{2}(6-2z)^2} dz$$

$$= 6 + \underbrace{\left[-\frac{2z^3}{3} + 4z^2 - 6z\right]_{z=1}^{z=2}}_{=\frac{4}{3}} \underbrace{- \left[\frac{1}{12}(6-2z)^3\right]_{z=2}^{z=3}}_{=\frac{2}{3}} = 8.$$

- **5. Variante:** Integrationsreihenfolge $\mathrm{Vol}(P) = \iiint_P \, dy\, dz\, dx$.
  Es ist für ein festes $x_0 \in [0,2]$:

  $$P \cap \{x = x_0\} = \left\{(x_0, y, z) \mid y \in [0,2],\ 0 \le z \le \frac{6 - x_0 - y}{2}\right\}$$

  und für feste $x_0 \in [0,2]$, $z_0 \in [0,3]$:

  $$\begin{aligned} P \cap \{x = x_0,\ z = z_0\} &= \{(x_0, y, z_0) \mid y \in [0,2],\ x_0 + y + 2z_0 \le 6\} \\ &= \{(x_0, y, z_0) \mid 0 \le y \le \min\{2, 6 - 2z_0 - x_0\}\}, \end{aligned}$$

  wobei nur Schnitte für $x_0 \in [0,2]$ und $z_0 \in [0,3]$ betrachtet werden, da diese sonst leer sind.
  Dann ist das Volumen des Polyeders gegeben durch

  $$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(P) &= \int_0^2 \int_0^{\frac{6-x_0}{2}} \int_0^{\min\{2,6-2z_0-x_0\}} dy_0\, dz_0\, dx_0 \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{4-x_0}{2}} 2 dz_0 + \int_{\frac{4-x_0}{2}}^{\frac{6-x_0}{2}} (6 - 2z_0 - x_0)\, dz_0 \right) dx_0 \\ &= \int_0^2 \left((4 - x_0) + \left[6z_0 - z_0^2 - x_0 z_0\right]_{\frac{4-x_0}{2}}^{\frac{6-x_0}{2}} \right) dx_0 \\ &= \int_0^2 (4 - x_0 + 1)\, dx_0 = \left[4x_0 - \frac{x_0^2}{2} + x_0\right]_0^2 \\ &= 8 - 2 + 2 = 8. \end{aligned}$$

  Hier wurde verwendet, dass

  $$6 - 2z_0 - x_0 \le 2 \text{ genau dann, wenn } \frac{4 - x_0}{2} \le z_0,$$

  dann ist für

  $$z_0 \in \left[0, \frac{4 - x_0}{2}\right] \to y_0 = 2 \ \text{ das Minimum}$$

  und für

  $$z_0 \in \left[\frac{4 - x_0}{2}, \frac{6 - x_0}{2}\right] \to y_0 = 6 - 2z_0 - x_0 \ \text{ das Minimum.}$$

- **6. Variante:** Integrationsreihenfolge $\mathrm{Vol}(P) = \iiint_P \, dy\, dx\, dz$.
  Aus Symmetriegründen ergibt sich hier die gleiche Rechnung wie in Variante 4, nur mit x und y vertauscht.

4. **a)** In Zylinderkoordinaten sind die beiden Paraboloide durch

$$z = r^2 \qquad \text{und} \qquad z = 8 - r^2$$

gegeben. Wegen

$$r^2 = 8 - r^2 = z, \quad r \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = 2,\ z = 4$$

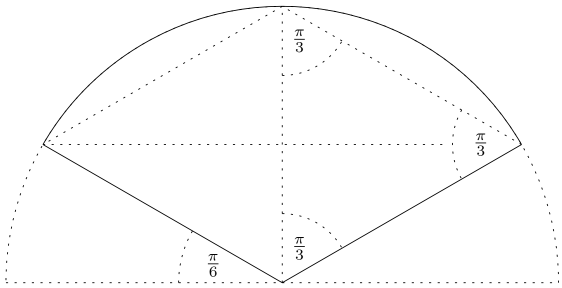
schneiden sie sich in einem Kreis mit Radius 2 in der Ebene $z = 4$. Das von den beiden Paraboloiden begrenzte endliche Volumen ist demnach

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{8-r^2} r \, dz \, d\theta \, dr &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(8 - 2r^2\right) r \, d\theta \, dr \\ &= 2\pi \int_0^2 (8r - 2r^2) \, dr = 2\pi \left(4r^2 - \frac{2}{4} r^4\right)\Big|_0^2 = 2\pi \,(16 - 8) = 16\pi. \end{aligned}$$

Alternativ ergibt sich das Volumen (ebenfalls in Zylinderkoordinaten) aus

$$\begin{aligned} 2 \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, d\theta \, dz &= 4\pi \int_0^4 \int_0^{\sqrt{z}} r \, dr \, dz \\ &= 4\pi \int_0^4 \frac{r^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{z}} dz = 2\pi \int_0^4 z \, dz = 16\pi, \end{aligned}$$

da der begrenzte Körper symmetrisch zur Ebene $z = 4$ liegt.



Zu Aufgabe **3 b)**

b) In Zylinderkoordinaten sind die beiden Flächen durch

$$z = \frac{r}{\sqrt{3}} \qquad \text{und} \qquad z = \sqrt{1-r^2}$$

gegeben. Wegen

$$\frac{r^2}{3} = 1 - r^2 = z^2, \quad r \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{2},\ z = \frac{1}{2}$$

schneiden sie sich in einem Kreis mit Radius $\frac{\sqrt{3}}{2}$ in der Ebene $z = 1/2$. Das von den beiden Flächen begrenzte endliche Volumen ist demnach

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\sqrt{1-r^2} - \frac{r}{\sqrt{3}}\right) r\,dr\,d\theta &= 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(r\sqrt{1-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{3}}\right) dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^3}{3^{\frac{3}{2}}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\pi\left(\frac{7}{24} - \frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

Da es sich bei dem Körper um einen Kugelausschnitt handelt, ist es allerdings natürlicher, das Volumen mittels **Kugelkoordinaten** zu berechnen (s. Figur):

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^2 \sin\phi\,d\varrho\,d\theta\,d\phi &= 2\pi \int_0^1 \varrho^2\,d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\phi\,d\phi \\ &= 2\pi\,\frac{\varrho^3}{3}\Bigg|_0^1 (-\cos\phi)\big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

5. **a)** Aufgrund der vorliegenden Symmetrie lässt sich die Masse am einfachsten in Kugelkoordinaten berechnen. Nach Voraussetzung gilt für die Dichte $\rho(r) = \alpha r^3$ und $\rho(1) = \alpha = \frac{1}{4}$, also ist die Masse der Kugel gegeben durch

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{\varrho^3}{4}\,\varrho^2 \sin\phi\,d\varrho\,d\theta\,d\phi &= \frac{\pi}{2}\int_0^2 \varrho^5\,dr \int_0^{\pi} \sin\phi\,d\phi \\ &= \frac{\pi}{2}\,\frac{\varrho^6}{6}\Bigg|_0^2 (-\cos\phi)\big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}\,\frac{128}{6} = \frac{32\pi}{3}.\end{aligned}$$

b) In Zylinderkoordinaten sind die beiden Flächen durch

$$z = \frac{r^2}{2} \qquad \text{und} \qquad z = \sqrt{3 - r^2}$$

gegeben. Wegen

$$\frac{r^4}{4} = 3 - r^2, \quad r \geq 0, \qquad \Rightarrow \qquad r = \sqrt{2}$$

schneiden sie sich in einem Kreis mit Radius $r = \sqrt{2}$ in der Ebene $z = 1$.

Das Volumen des begrenzten Körpers ist

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{3 - r^2} - \frac{r^2}{2} \right) r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(r\sqrt{3 - r^2} - \frac{r^3}{2} \right) dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{(3 - r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^4}{8} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\pi \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \pi \left(2\sqrt{3} - \frac{5}{3} \right). \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt (ξ, η, ζ) auf der z-Achse, d.h. $\xi = \eta = 0$. Es genügt daher, die z-Komponenten zu berechnen:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{V} \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} z \, r \, dr \, d\theta \, dz = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2} \Bigg|_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{3-r^2}} r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{V} \int_0^{\sqrt{2}} \left(3 - r^2 - \frac{r^4}{4} \right) r \, dr = \frac{\pi}{V} \left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\pi}{V} \left(3 - 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{V} \frac{5}{3} = \frac{3}{6\sqrt{3} - 5} \frac{5}{3} = \frac{5}{83} \left(6\sqrt{3} + 5 \right). \end{aligned}$$

6. a) Die Gleichung des Kreises mit Radius $a > 0$ um den Mittelpunkt $(0, R, 0)$ in der yz-Ebene lautet

$$(y - R)^2 + z^2 = a^2.$$

b) Der Punkt $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ liegt genau dann auf dem Torus, wenn er nach Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \theta$ auf dem Kreis aus Aufgabenteil a) liegt, also wenn der Punkt $(0, r, z)$ die Gleichung $(r - R)^2 + z^2 = a^2$ erfüllt. Die Gleichung des Torus in Zylinderkoordinaten lautet also

$$(r - R)^2 + z^2 = a^2.$$

c) Der Toruskörper beinhaltet all jene Punkte $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$, sodass $(0, r, z)$ innerhalb des abgeschlossenen Kreises in der yz-Ebene mit Mittelpunkt $(0, R, 0)$ und Radius a liegt, also

$$(r - R)^2 + z^2 \leq a^2$$

gilt. Somit gibt es keine Bedingung an θ (d.h. $0 \leq \theta \leq 2\pi$), $z^2 \leq a^2$ (d.h. $-a \leq z \leq a$) und zu jeder Wahl von $z \in [-a, a]$ existieren r, die $(r - R)^2 + z^2 \leq a^2$ erfüllen und diese sind genau die Lösungen von

$$-\sqrt{a^2 - z^2} \leq r - R \leq \sqrt{a^2 - z^2}.$$

Insgesamt haben wir also:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \ -a \leq z \leq a, \ R - \sqrt{a^2 - z^2} \leq r \leq R + \sqrt{a^2 - z^2}$$

d) Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten und der in (c) hergeleiteten Parametrisierung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\mathrm{Torus}) &= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{2\pi}\int_{R-\sqrt{a^2-z^2}}^{R+\sqrt{a^2-z^2}} r\,dr\,d\theta\,dz = \int_{-a}^{a}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=R-\sqrt{a^2-z^2}}^{r=R+\sqrt{a^2-z^2}} d\theta\,dz \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{0}^{2\pi} 2R\sqrt{a^2-z^2}\,d\theta\,dz = 4\pi R\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-z^2}\,dz \\
&= 4\pi R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\,a\,d\theta \\
&= 4\pi R a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\,d\theta = 2\pi^2 R a^2.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitution $z = a\sin(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ verwendet und

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2}.$$