Lösung zu Serie 8

1. Dies sieht man am einfachsten, indem man den Typ der Kurve (Gerade, Kreis, etc.) berücksichtigt, sowie die räumliche Lage (liegt die Kurve in einer der drei Koordinaten-Ebenen oder im ganzen Raum) und die Anfangs- und Endpunkte.

1) c. Es handelt sich um ein Stück einer Gerade in der xy-Ebene mit Startpunkt $(0, 1, 0)$ und Endpunkt $(1, 0, 0)$.

2) e. Es handelt sich um ein Geradenstück, welches sich nur in z-Richtung vom Startpunkt $(1, 1, -1)$ zum Endpunkt $(1, 1, 1)$ bewegt.

3) g. Es handelt sich um einen gegen den Uhrzeigersinn verlaufenden Kreis mit Radius 2 um den Ursprung in der xy-Ebene.

4) a. Es handelt sich um einen Teil einer Gerade auf der x-Achse mit Startpunkt $(-1, 0, 0)$ und Endpunkt $(1, 0, 0)$.

5) d. Es handelt sich um ein Geradenstück im Raum mit Start bei $(0, 0, 0)$ und Ende bei $(2, 2, 2)$.

6) b. Es handelt sich um ein Stück einer Gerade in der yz-Ebene mit Startpunkt $(0, 0, 2)$ und Endpunkt $(0, 1, 0)$.

7) f. Es handelt sich um eine parabelförmige Kurve in der yz-Ebene mit Scheitelpunkt $(0, -1, 0)$, Startpunkt $(0, 0, -2)$ und Endpunkt $(0, 0, 2)$.

8) h. Es handelt sich um einen gegen den Uhrzeigersinn von $(2, 0)$ nach $(-2, 0)$ durchlaufenen Halbkreis um $(0, 0, 0)$ in der xz-Ebene.

2. **a)** Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}$, $\quad 0 \leq t \leq 4$ und somit

$$v(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dann ist

$$\int_C x\, ds = \int_0^4 t \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}\, dt = \sqrt{5}\frac{t^2}{4}\bigg|_0^4 = 4\sqrt{5}.$$

b) Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\quad 0 \leq t \leq 2$ und somit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Dann ist

$$\int_C x\, ds = \int_0^2 t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{8}\bigg|_0^2 = \frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

c) Es ist $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2-3t \\ 3-2t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$ und somit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^1 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_C (x+y+z)\,ds &= \int_0^1 (1-t+2-3t+3-2t) \cdot \sqrt{14}\,dt \\ &= \sqrt{14} \int_0^1 (6-6t)\,dt = \sqrt{14}\left[6t - 3t^2\right]_0^1 \\ &= \sqrt{14}(6-3) = 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

d) Es ist $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$ und $\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1$ und somit

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{v}_1(t)| = \sqrt{1+4t^2} \\ \vec{v}_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\vec{v}_2(t)| = 1. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} (x + \sqrt{y} - z^2)\,ds &= \int_{C_1} (x + \sqrt{y} - z^2)\,ds + \int_{C_2} (x + \sqrt{y} - z^2)\,ds \\ &= \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2}\,dt + \int_0^1 (2-t^2)\,dt \\ &= \left[2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (1+4t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{8}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) + 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 1 + 12 - 2\right) \\ &= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} + 9\right). \end{aligned}$$

e) Es gelten

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad (\delta \circ \gamma)(t) = e^{r^2\cos^2 t + r^2 \sin^2 t + ht} = e^{r^2 + ht},$$

also

$$\int_\gamma \delta\, ds = \int_0^{2\pi} e^{r^2+ht}\sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t + h^2}\, dt = \sqrt{r^2+h^2}\, e^{r^2}\int_0^{2\pi} e^{ht}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{h}\, e^{r^2}\, e^{ht}\Big|_0^{2\pi} = \sqrt{\frac{r^2}{h^2}+1}\, e^{r^2}\left(e^{2\pi h}-1\right).$$

3. Die Arbeit eines Vektorfeldes entlang einer Kurve γ ist gegeben durch

$$W = \int_I F(\gamma(t))\dot{\gamma(t)}dt.$$

a) Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (1-t, 2t)^T$, $t \in [0,1]$, ergibt sich

$$\int_0^1 F(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix}1-t\\2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-1+t+4t)dt$$

$$= \left(-t+\frac{5}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Alternativ: F ist ein Gradientenfeld, das heisst $F = \nabla\phi$ mit $\phi(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$. Dann ist $W = \phi(B) - \phi(A) = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$.

b) Mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$, $t \in [0, 2\pi]$, ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}2\cos t - \sin t\\ \cos t + 2\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(-2\cos t\sin t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t\cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

c) γ ist die Ellipse $(x-1)^2 + \dfrac{(y+2)^2}{2^2} = 1$, also eine Ellipse um $(1,-2)$ mit $a = 1$ und $b = 2$. Daher ist eine Parametrisierung

$$\gamma(t) = (1,-2) + (\cos(t), 2\sin(t)) = (\cos t + 1, 2\sin t - 2)^T,\ t \in [0, 2\pi].$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\sin t + 2\\ \cos t + 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ 2\cos t\end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2 t - 2\sin t + 2\cos^2 t + 2\cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+\cos t - \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi.$$

d) Z.B. ergibt sich in **a)** mit der Parametrisierung $\gamma(t) = (1-2t, 4t)^T$, $t \in [0, 1/2]$,

$$\int_0^{1/2} F(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_0^{1/2}\begin{pmatrix}1-2t\\4t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} dt = \int_0^{1/2}(-2+4t+16t)dt$$

$$= \left(-2t+10t^2\right)\Big|_0^{1/2} = \frac{3}{2}, \qquad \text{wie zuvor.}$$

4. **a)** Die Geradenabschnitte können wie folgt parametrisiert werden:

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1-t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{r}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1 \quad \text{mit} \quad \dot{\vec{r}}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem gilt $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 \\ 2x^3y \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 3(t-1)^2(1-t)^2 \\ 2(t-1)^3(1-t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 3t^4 \\ 2t^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 \left(3(t-1)^4 + 2(t-1)^4\right) dt + \int_0^1 \left(3t^4 + 2t^4\right) dt \\ &= \int_0^1 5(t-1)^4 \, dt + \int_0^1 5t^4 \, dt = \left[(t-1)^5\right]_0^1 + \left[t^5\right]_0^1 = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

b) Da es sich bei $\vec{F}$ um ein Gradientenfeld mit Potentialfunktion $f(x,y) = x^3y^2$ handelt, ist das Arbeitsintegral wegunabhängig. Somit ist

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,1) - f(-1,1) = 1 - (-1) = 2.$$

5. Besitzt das Vektorfeld $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))^T$ auf $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ ein Potential, gilt also $F = \nabla\phi$ für eine (hinreichend reguläre) Funktion $\phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\Big(\phi_{xy}(x,y) - \phi_{yx}(x,y) = \Big) \quad \frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = 0, \qquad (\star)$$

und mit der Kettenregel folgt für jeden (hinreichend regulären) Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt &= \int_a^b \nabla\phi(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\gamma(t)) \, dt = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Insbesondere hängt die von F längs γ verrichtete Arbeit nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ ab und verschwindet für geschlossene Wege ($\gamma(a) = \gamma(b)$).

a) Das Vektorfeld ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert und erfüllt $(\star)$, denn

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = 2\,x\,y.$$

Es gelten

$$\int F_1(x,y)\,dx = \int x\,y^2\,dx = \frac{x^2\,y^2}{2} + C(y) \qquad \text{und}$$

$$\int F_2(x,y)\,dy = \int \left(x^2\,y + 2\right) dy = \frac{x^2\,y^2}{2} + 2\,y + D(x),$$

also ist z.B. $\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2\,y^2 + 2\,y$ ein Potentialfeld. Die Arbeit beträgt

$$\phi(-8,-8) - \phi(-8,8) = -16 - 16 = -32.$$

b) Das Vektorfeld ist für $x \in \mathbb{R}$ und $y > 0$ definiert und erfüllt $(\star)$, denn

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = \frac{x}{y}.$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \int F_1(x,y)\,dx &= \int x \ln y\,dx = \frac{x^2 \ln y}{2} + C(y) \qquad \text{und} \\ \int F_2(x,y)\,dy &= \int \frac{x^2}{2y}\,dy = \frac{x^2 \ln y}{2} + D(x), \end{aligned}$$

also ist z.B. $\phi(x,y) = \frac{x^2 \ln y}{2}$ ein Potentialfeld. Entlang eines *geschlossenen* Integrationsweges wird somit keine Arbeit verrichtet.

c) Das Vektorfeld ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definiert und erfüllt $(\star)$, denn

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y) = -\frac{2\,x\,y}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Es gelten

$$\begin{aligned} \int F_1(x,y)\,dx &= \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+y^2\right) + C(y) \qquad \text{und} \\ \int F_2(x,y)\,dy &= \int \frac{y}{x^2+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+y^2\right) + D(x), \end{aligned}$$

also ist z.B. $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\,\ln\left(x^2+y^2\right)$ ein Potentialfeld. Die Arbeit beträgt

$$\phi(5,12) - \phi(3,4) = \frac{1}{2}\,\ln\frac{169}{25} = \ln\frac{13}{5}.$$

d) Das Vektorfeld ist auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ definiert und erfüllt $(\star)$, denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y)}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2\,y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2\,x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= -\frac{2}{x^2+y^2} + \frac{2\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2+2}{x^2+y^2} = 0. \end{aligned}$$

F besitzt aber kein Potential (vgl. die Bemerkung unten): Parametrisieren wir den Kreis mit Radius $r > 0$ durch $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)^T$, $0 \leq t \leq 2\pi$, so ist

$$F(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\frac{r\sin t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} \\ \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{r}\sin t \\ \frac{1}{r}\cos t \end{pmatrix}, \qquad \dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \end{pmatrix},$$

und also

$$\int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi.$$

Insbesondere ist F kein Potentialfeld, sonst würde dieses Integral verschwinden.

Bemerkung: Dieses Beispiel zeigt, dass die Bedingung ($\star$) zwar notwendig, im Allgemeinen aber nicht hinreichend für die Existenz eines Potentials ist. ($\star$) ist nur dann auch hinreichend, wenn der Definitionsbereich des Vektorfeldes *einfach zusammenhängt* (*Lemma von Poincaré*). Diese Voraussetzung ist z.B. für die Vektorfelder in den Teilaufgaben **a)** und **b)** erfüllt. In diesen Fällen könnte selbst bei verschwindender Rotation das vorliegende Vektorfeld noch immer kein Gradientenfeld sein und es muss eine eingehendere Untersuchung vorgenommen werden (wie dies oben durch die explizite Bestimmung von Potentialen zum Beispiel getan wurde).

6. Wir bemerken zunächst, dass die Vektorfelder in **a)** und **b)** auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert sind. Insbesondere sind die jeweiligen Definitionsbereiche einfach zusammenhängend, so dass die Vektorfelder F genau dann ein Potential besitzen, wenn ihre Rotation verschwindet. Das Vektorfeld in **c)** ist definiert für $y \neq 0$, der Definitionsbereich hier ist nicht zusammenhängend, aber beide Zusammenhangskomponenten (nämlich die Halbräume $\{y > 0\}$ und $\{y < 0\}$) sind einfach zuammenhängend, sodass auch hier das Rotationskriterium hinreichend wäre.
Dies trifft jedoch nicht zu für **d)**, wo $\vec{F}$ für $(x,z) \neq (0,0)$ definiert ist, was nicht einfach zusammenhängend ist, sodass verschwindende Rotation zwar eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung, ein Gradientenfeld zu sein, ist.

a) Es gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = (2,2,2)^T \neq \vec{0}$, also ist F kein Gradientenfeld.
Es sei C der positiv orientierte Einheitskreis $\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 = 1\}$ in der xy-Ebene. Eine Parametrisierung dieser Kurve ist z.B. durch

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)^T, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit

$$\vec{F}(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0. \end{aligned}$$

b) Es gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Ein Potential ϕ erfüllt das System

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = x + z & \Rightarrow \quad \phi = \frac{x^2}{2} + xz + f(y,z), \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = y - z & \Rightarrow \quad \phi = \frac{y^2}{2} - yz + g(x,z), \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = x - y & \Rightarrow \quad \phi = xz - yz + h(x,y), \end{cases}$$

wobei f, g und h beliebige differenizierbare Funktionen in zwei Variablen sind. Also ist z.B. $\phi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + xz - yz$ ein Potential.

c) Es gilt $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$. Wir lösen ein System von Gleichungen ähnlich wie in Teilaufgabe **b)**. Ein Potential ist z.B. $\phi(x,y,z) = e^{xyz} + x + \ln y^2$.

d) Es gilt

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{x^2+z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+z^2} \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x^2+z^2} - \frac{2z^2}{x^2+z^2} + \frac{1}{x^2+z^2} - \frac{2x^2}{x^2+z^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Dennoch besitzt das Feld F kein Potential: ist C der positiv orientierte Einheitskreis $\{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+z^2=1\}$, den wir durch

$$t \mapsto (\cos t, 0, \sin t)^T, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

parametrisieren, so gilt

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ -\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt = -2\pi \neq 0. \end{aligned}$$