Lösung zu Serie 9

1. Überprüfung des Satzes von Green

Für die Kreisscheibe mit Radius a um Null gilt, dass die äußere Einheitsnormalen in einem Punkt (x, y) auf dem Rand C durch $\vec{n} = \frac{1}{a}(x, y)^T$ gegeben ist. Der Tangentialvektor bei Durchlaufen von C in positivem Sinne ergibt sich zu $\vec{T} = \frac{1}{a}(-y, x)^T$.

a) Definitionsgemäß berechnet sich der Fluss von $\vec{F}$ durch C zu

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \oint_C \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ds = \oint_C 0\, dx = 0.$$

Andererseits gilt für die Divergenz von $\vec{F}$:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 + 0 = 0.$$

Damit liefert die Formel aus dem Satz von Green das Ergebnis

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R 0\, dx\, dy = 0.$$

Für die Zirkulation von $\vec{F}$ entlang C im positiven Sinne ergibt sich bei Berechnung mittels der Definition

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ a\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} a\, dt = 2\pi a^2.$$

Als Rotation von $\vec{F}$ erhalten wir

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Damit liefert die Formel aus dem Satz von Green:

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R (1 - (-1))\, dx\, dy = 2 \iint_R dx\, dy = 2 \cdot \mathrm{Vol}_2(R) = 2\pi a^2,$$

wobei $\mathrm{Vol}_2(R)$ den Flächeninhalt des Gebietes R bezeichnet.

b) Der Fluss von $\vec{F}$ durch C ist laut Definition

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds &= \oint_C \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} a\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 \sin(t)\cos(t)\, dt = \left[\frac{a^2}{2}\sin(2t)\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Die Divergenz von $\vec{F}$ verschwindet wieder:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 + 0 = 0,$$

sodass die Formel aus dem Satz von Green ebenfalls 0 gibt:

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R 0\, dx\, dy = 0$$

Für die Zirkulation von $\vec{F}$ entlang C im positiven Sinne erhalten wir nach der Definition

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} a\, dt = -a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt = -\pi a^2.$$

Dagegen lautet die Rotation von $\vec{F}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = -1 - 0 = -1.$$

Somit liefert die Formel aus dem Satz von Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R -1\, dx\, dy = -\operatorname{Vol}_2(R) = -\pi a^2.$$

c) Der Fluss von $\vec{F}$ durch C ist - nur mit Hilfe der Definition:

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \oint_C \begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ds &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2a\cos(t) \\ -3a\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} a\, dt \\ &= a^2 \left(2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt - 3 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\, dt\right) = a^2(2\pi - 3\pi) = -\pi a^2.\end{aligned}$$

Andererseits erhält man als Divergenz von $\vec{F}$:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 2 + (-3) = -1,$$

sodass die Formel aus dem Satz von Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R -1\, dx\, dy = -\operatorname{Vol}_2(R) = -\pi a^2$$

liefert. Die Zirkulation von $\vec{F}$ entlang C im positiven Sinne berechnet sich direkt zu

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \oint_C \begin{pmatrix} 2x \\ -3y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} ds &= -\oint_C 5xy\, ds \\ &= -\int_0^{2\pi} a\cos(t)\sin(t)\, dt = 0.\end{aligned}$$

Der Satz von Green liefert mit

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 - 0 = 0$$

ebenfalls Null:

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_R 0\, dx\, dy = 0.$$

d) Der <u>Fluss von $\vec{F}$ durch C</u> ist

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = \oint_C \begin{pmatrix}-x^2y\\ xy^2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{a}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\,ds = a^4\int_0^{2\pi}\cos(t)\sin(t)\big(\cos^2(t)-\sin^2(t)\big)\,dt$$
$$= a^4\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2t)\cos(2t)\,dt = a^4\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin(4t)\,dt = 0.$$

Als Divergenz erhält man für $\vec{F}$:

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} = -2xy+2xy = 0$$

und damit liefert die Formel aus dem Satz von Green:

$$\iint_R\Big(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\Big)\,dx\,dy = \iint_R 0\,dx\,dy = 0.$$

Für die <u>Zirkulation entlang C im positiven Sinne</u> ergibt sich:

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \oint_C \begin{pmatrix}-x^2y\\ xy^2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{a}\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}\,ds = 2\oint_C x^2y^2\,ds$$
$$= 2a^4\int_0^{2\pi}\cos^2(t)\sin^2(t)\,dt$$
$$= 2a^4\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2(2t)\,dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{4\pi}\sin^2(s)\,ds = 2\pi\frac{a^4}{4} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Mit der Formel aus dem Satz von Green kommt man auf

$$\oint_C\Big(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\Big)\,ds = \iint_R (y^2-(-x^2))\,dx\,dy = \iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a r^2\cdot r\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{2}\pi.$$

2. **a)** Der <u>Fluss von $\vec{F}$ durch C</u> ist

$$\iint_R (1+1)\,dx\,dy = 2\cdot\mathrm{Vol}_2(\text{Quadrat } [0,1]\times[0,1]) = 2$$

und die <u>Zirkulation von $\vec{F}$ entlang C ist</u>

$$\iint_R (-1-(-1))\,dx\,dy = 0.$$

b) Das dreieckige Integrationsbegiet R, das vom den Geraden $y=0$, $x=3$ und $y=3$ berandet wird, kann beschrieben werden durch die Bedingung

$$0\le x\le 3 \text{ und } 0\le y\le x.$$

Der <u>Fluss von $\vec{F}$ durch den Rand des Dreiecks</u> ist

$$\begin{aligned}\iint_R (-2x+2y)\,dx\,dy &= 2\iint_R (y-x)\,dx\,dy = 2\int_0^3\int_0^x (y-x)\,dy\,dx\\ &= 2\int_0^3 \left[\frac{y^2}{2}-xy\right]_0^x dx = 2\int_0^3 \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}-x^2\right)}_{=-\frac{x^2}{2}} dx\\ &= \int_0^3 -x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\bigg|_0^3 = -9.\end{aligned}$$

Die <u>Zirkulation von $\vec{F}$ entlang des Randes des Dreiecks</u> ist

$$\iint_R (2x-2y) = 2\iint_R (x-y)\,dx\,dy = 9,$$

vgl. mit der Rechnung oben.

c) Das Integrationsgebiet R, das von der Kurve umrandet wird, kann dargestellt werden durch

$$0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$

Dann ist der <u>Fluss von $\vec{F}$ durch die Kurve</u>

$$\begin{aligned}\iint_R (y+(-1))\,dx\,dy &= \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (y-1)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}-y\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx\\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2}-\sqrt{x}-\frac{x^4}{2}+x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{4}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^5}{10}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{3} = -\frac{11}{60}.\end{aligned}$$

Die <u>Zirkulation von $\vec{F}$ entlang der Kurve</u> ist

$$\begin{aligned}\iint_R (1-(x+2y))\,dx\,dy &= \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-x-2y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[y-xy-y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx\\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{x}-x\sqrt{x}-x-x^2+x^3+x^4\right) dx\\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}-\frac{2}{5}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5} = -\frac{7}{60}.\end{aligned}$$

d) Offenbar gilt für das Integrationsgebiet R, das von der Kurve umrandet wird,

$$0 \le x \le 2, \quad x^2-x \le y \le x.$$

Dann ist der Fluss von $\vec{F}$ durch die Kurve

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4)\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_{x^2-x}^{x} \left(3x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4\right) dy\,dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2y^3 + \frac{1}{2}x^4y\right]_{x^2-x}^{x} dy \\
&= \int_0^2 \left(x^5 + \frac{1}{2}x^5 - x^2(x^2-x)^3 - \frac{1}{2}x^4(x^2-x)\right) dy \\
&= \int_0^2 \left(-x^8 + 3x^7 - \frac{7}{2}x^6 + 3x^5\right) dx \\
&= \left[-\frac{x^9}{9} + \frac{3x^8}{8} - \frac{x^7}{2} + \frac{x^6}{2}\right]_0^2 \\
&= \left[x^6\left(-\frac{x^3}{9} + \frac{3x^2}{8} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]_0^2 \\
&= 64\left(-\frac{8}{9} + \frac{12}{8} - 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{64}{9}.
\end{aligned}$$

Die Zirkulation entlang der Kurve ist

$$\iint_R \left(2x^3y - 2x^3y\right)\,dx\,dy = 0.$$

3. Anwendung des Satzes von Green

a) Wir verwenden hier den Satz von Green in der Form

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds = \iint_R \operatorname{rot}\vec{F}\,dx\,dy$$

wobei $\vec{F} = (M,N)^T$. Dann ist hier $M = y^2$ und $N = x^2$ und R ist das Gebiet, welches von den Geraden $y = 0$, $x + y = 1$ und $x = 0$ berandet wird:

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le -x+1.$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\oint_C \left(y^2\,dx + x^2\,dy\right)\,dx\,dy &= \iint_R (2x-2y)\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^1 \int_0^{-x+1} (x-y)\,dy\,dx = 2\int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_0^{-x+1} dy \\
&= 2\int_0^1 \left(-x^2 + x - \frac{(-x+1)^2}{2}\right) dx \\
&= 2\int_0^1 \left(-\frac{3x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\right) dx = 2\left[-\frac{x^3}{2} + x^2 - \frac{x}{2}\right]_0^1 \\
&= 2\left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Man bemerke, dass auf den Geraden $x = 0$ und $y = 0$ der 'Integrand' $y^2\,dx + x^2\,dy$ verschwindet. Und auf der Strecke von $(1,0)$ nach $(0,1)$ ist $y^2\,dx + x^2\,dy = (1-x)^2\,dx - x^2\,dx = (1-2x)\,dx$ und dies verschwindet bei Integration über $(0,1)$ bzw. aus Symmetriegründen.

b) Das Integrationsgebiet ist offenbar die Kreisscheibe, die vom angegebenen Kreis (Mittelpunkt $(2,3)$, Radius 2) umrandet wird. Es sind $M = 6y + x$ und $N = y + 2y$ und mit dem Satz von Green folgt

$$\begin{aligned}\oint_C (6y+x)\,dx + (y+2x)\,dy &= \iint_R (2-6)\,dx\,dy \\ &= -4 \cdot \mathrm{Vol}_2(\text{Kreis mit Radius } r = 2) \\ &= -4 \cdot 4\pi = -16\pi.\end{aligned}$$

4. Flächenparametrisierungen

a) Die Punkte im Inneren des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ sind genau die Punkte, die der Ungleichung $x^2 + y^2 < 1$ genügen. Die Punkte, welche im Inneren des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ und auf der Ebene $y + 2z = 2$ liegen, sind als gegeben durch die Bedingung

$$x^2 + y^2 < 1 \text{ und } y + 2z = 2.$$

Man könnte dies in Zylinderkoordinaten auch beschreiben als

$$0 \le r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi \text{ und } z = 1 - \frac{r}{2}\sin(\theta).$$

Eine denkbare Parametrisierung wäre demnach

$$(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1 - \frac{r}{2}\sin(\theta)),\ 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

b) Die Punkte auf dem Kegel $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ können in Zylinderkoordinaten durch die Bedingung $z = 2r$ beschrieben werden. Der Teil des Kegels, welcher sich zwischen den beiden Ebenen $z = 2$ und $z = 6$ befindet, kann demnach in Zylinderkoordinaten durch

$$1 \le r \le 3,\ z = 2r$$

ausgedrückt werden. Damit ist eine zulässige Parametrisierung der Kegelstumpfs gegeben durch

$$(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r),\ 1 \le r \le 3$$

c) Wir bedienen uns wieder der Zylinderkoordinaten. Ein Punkt liegt genau dann auf dem Zylinder $x^2 + y^2 = 1$, wenn $r = 1$ gilt. Ein Punkt liegt genau dann zusätzlich noch zwischen den beiden Ebenen $z = 1$ und $z = 4$, wenn $1 \le z \le 4$. Eine mögliche Parametrisierung für das gegebene Kreiszylinderband ist also

$$(\cos(\theta), \sin(\theta), z)\ , 0 \le \theta < 2\pi,\ 1 \le z \le 4$$

d) Die parabolische Kappe besteht aus all jenen Punkten (x, y, z), für die $z = 2 - x^2 - y^2$ (schließlich sollen sie auf dem Paraboloid liegen) gilt und $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ (schließlich interessieren wir uns nur für den von besagtem Kegel ausgeschnittenen Teil). Bedienen wir uns wieder der Zylinderkoordinaten, so ist diese Menge gegeben durch

$$0 \leq r \leq 1, z = 2 - r^2.$$

Dabei resultiert die Bedingung $0 \leq r \leq 1$ daraus, dass die Schnittkurve des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und des Paraboloids $z = 2 - x^2 - y^2$ der Kreis mit Radius 1 um den Ursprung in der Ebene $z = 1$ ist. Eine mögliche Parametrisierung für die parabolische Kappe wäre damit

$$(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2 - r^2),\ 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi$$

e) Die abgesägte Kugel besteht genau aus den Punkten (x, y, z) auf der Kugeloberfläche, für die $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ gilt. In Kugelkoordinaten sind die Punkte auf der Kugel parametrisiert durch $(\sqrt{2}\cos(\theta)\sin(\varphi), \sqrt{2}\sin(\theta)\sin(\varphi), \sqrt{2}\cos(\varphi))$, wobei θ im Intervall $[0, 2\pi]$ und φ im Intervall $[0, \pi]$ rangiert. Die Punkte mit $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ sind genau diejenigen Punkte, für die $\sqrt{2}\cos(\varphi) \leq \sqrt{2}\sin(\varphi)$, d.h. $\cos(\varphi) \geq \sin(\varphi)$ gilt. Bekanntlich ist dies für $\varphi \in [0, \pi]$ genau für $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \pi$ erfüllt. Die abgesägte Kugel/Sphäre ist also gegeben durch

$$(\sqrt{2}\cos(\theta)\sin(\varphi), \sqrt{2}\sin(\theta)\sin(\varphi), \sqrt{2}\cos(\varphi)),\ \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$$

5. a) Chip

I. Skizze des Chips

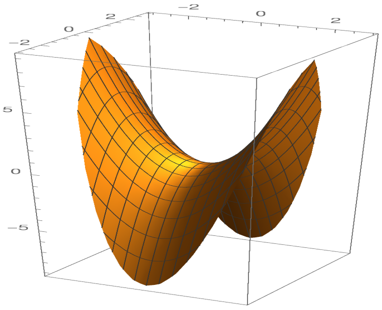

Abbildung 1: Chip / Hyperbolisches Paraboloid

II. Wir verwenden hier kartesische Koordinaten. Dann ergibt sich für die z-Koordinate: $z = x^2 - y^2$. Da für x und y die Bedingung $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ gilt, rangiert also x im Intervall $[-3, 3]$ und zu einem $x \in [-3, 3]$ liegen die y, sodass $x^2 + y^2 \leq 9$ ist, im Intervall $[-\sqrt{9 - x^2}, \sqrt{9 - x^2}]$. Damit kommen wir zu der Parametrisierung

$$\vec{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2, \end{pmatrix} \text{ mit } -3 \leq x \leq 3,\ -\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}.$$

III. Die x-Koordinatenlinien und y-Koordinatenlinien sind bereits in der Skizze 1 oben eingezeichnet. Die x-Koordinatenlinien sind die von links nach rechts verlaufenden nach oben geöffneten Parabeln, während die y-Koordinatenlinien die aus dem Bildvorder- in den Bildhintergrund verlaufenden nach unten geöffneten Parabeln sind.

IV. Da die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}\begin{pmatrix}1\\0\\2x\end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\begin{pmatrix}0\\1\\-2y\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, liefert das Kreuzprodukt einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, der auf beiden senkrecht steht.

$$\vec{n}(x,y) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \begin{pmatrix}1\\0\\2x\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\-2y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x\\2y\\1.\end{pmatrix}$$

V. Der Normalenvektor im Punkt $\vec{r}(x,y)$ ist genau dann parallel zu $(1,0,1)^T$, wenn $2x = 1$ und $y = 0$ ist. Dies entspricht dem Punkt

$$\vec{r}(-\frac{1}{2},0) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

<u>Alternative Lösung mit Zylinderkoordinaten:</u>

I. Skizze des Chips

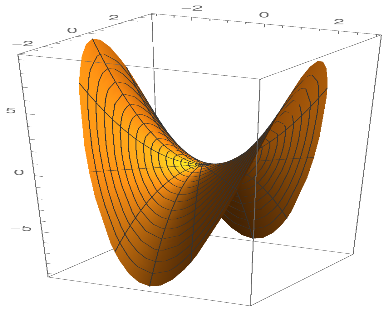

Abbildung 2: Chip / Hyperbolisches Paraboloid

II. Wir wählen Zylinderkoordinaten, d.h. $(x,y,z) = (u\cos(v), u\sin(v), z)$ mit $u \geq 0$, $0 \leq v < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ (a priori). Ein Punkt (x,y,z) liegt genau dann auf dem Chip, wenn sowohl

- $0 \leq u^2 = x^2 + y^2 \leq 9$, also $0 \leq u \leq 3$ als auch
- $z = x^2 - y^2 = u^2\big(\cos^2(v) - \sin^2(v)\big) = u^2\cos(2v)$,

d.h. als (eine mögliche) Parametrisierung erhalten wir

$$\vec{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u^2\cos(2v)),\ 0 \leq u \leq 3,\ 0 \leq v < 2\pi.$$

III. Einige Koordinatenlinien sind in der Skizze 2 bereits eingezeichnet. Die kreisförmigen Koordinatenlinien sind für konstanten Radius u und die strahlenförmigen Koordinatenlinien für konstanten Winkel v.

IV. Falls $\frac{\partial r}{\partial u}$ und $\frac{\partial r}{\partial v}$ linear unabhängig sind, liefert das Kreuzprodukt stets einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor, der senkrecht auf beiden steht, also einen

Normalenvektor zur Fläche im Punkt $\vec{r}(u,v)$. Hier haben wir:

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2u\cos(2v) \end{pmatrix},$$
$$\frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ -2u^2\sin(2v) \end{pmatrix}.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}\vec{n}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) &= \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ 2u\cos(2v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ -2u^2\sin(2v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(v)\cdot(-2u^2\sin(2v)) - u\cdot\cos(v)2u\cos(2v) \\ 2u\cos(2v)\cdot(-u\sin(v)) - \cos(v)\cdot(-2u^2\sin(2v)) \\ \cos(v)\cdot u\cos(v) - \sin(v)\cdot(-u\sin(v)) \end{pmatrix}. \\ &= \begin{pmatrix} -2u^2\cos(v) \\ 2u^2\sin(v) \\ u \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(Man bemerke auch, dass sich der hier mit Zylinderkoordinaten bestimmte Normalenvektor von demjenigen in der vorigen Lösung mit kartesischen Koordinaten in dem Proportionalitätsfaktor u unterscheidet.) Eine Probe zeigt, dass

$$\vec{n}(u,v)\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) = 0 = \vec{n}(u,v)\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v).$$

(Man bemerke, dass die hier gewählte Parametrisierung zu $\vec{n}(0,0) = 0$ führt. Dies ist keine Singularität der Fläche, sondern nur eine Koordinatensingularität. Würden wir $\vec{n}(u,v)$ normieren, erhielten wir einen sich stetig ändernden Normalenvektor auf der ganzen Fläche. Im Punkt $\vec{r}(0,0)$ zeigen Normalenvektoren in Richtung der z-Achse.)

V. Aus der vorangegangenen Bemerkung ist klar, dass der Normalenvektor bei $u = 0, v = 0$ nicht parallel zu $(1,0,1)^T$ ist. Somit ist $\vec{n}(u,v)$ in genau den Punkten parallel zu $(1,0,1)^T$, in denen $-2u^2\cos(v) = u \neq 0$ und $2u^2\sin(v) = 0$. Dies impliziert $\sin(v) = 0$ (also $v = 0$ oder $v = \pi$) und $u = -\frac{1}{2\cos(v)}$. Da $u \geq 0$ sein muss, kommt also nur $v = \pi$ in Frage. Für u ergibt sich dann $\frac{1}{2}$. Der einzige Punkt, in dem $\vec{n}(u,v)$ parallel zu $(1,0,1)$ ist, ist $\vec{r}(\frac{1}{2},\pi) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})^T$.

b) Eine Parabolantenne

I. Skizze der Parabolantenne

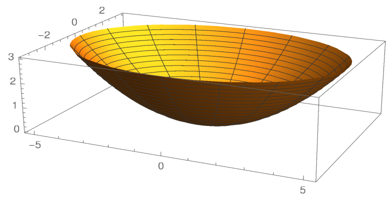

Abbildung 3: Parabolantenne / Parabolisches Ellipsoid

II. Gegeben $z \in [0,3]$, liegt (x,y,z) genau dann auf der Parabolantenne, wenn

$$1 = \frac{x^2}{9z} + \frac{y^2}{4z}.$$

Dies beschreibt eine Ellipse und diese kann in Polarkoordinaten parametrisiert werden als

$$(3\sqrt{z}\cos(v), 2\sqrt{z}\sin(v)),\ 0 \leq v < 2\pi.$$

Folglich erhalten wir als (eine mögliche) Parametrisierung der Parabolantenne 3:

$$\vec{r}(u,v) = (3\sqrt{u}\cos(v), 2\sqrt{u}\sin(v), u),\ 0 \leq u \leq 3,\ 0 \leq v < 2\pi$$

III. In der Skizze 3 sind einige Koordinatenlinien für konstante Höhe u (Ellipsen) und Koordinatenlinien für konstanten Winkel v eingezeichnet.

IV. Wir gehen vor wie oben und erhalten mithilfe von

$$\frac{\partial r}{\partial u}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{u}}\cos(v) \\ \frac{1}{\sqrt{u}}\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} -3\sqrt{u}\sin(v) \\ 2\sqrt{u}\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

als Normalenvektor

$$\vec{n}(u,v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{u}}\cos(v) \\ \frac{1}{\sqrt{u}}\sin(v) \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3\sqrt{u}\sin(v) \\ 2\sqrt{u}\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u}}\sin(v)\cdot 0 - 1\cdot 2\sqrt{u}\cos(v) \\ 1\cdot(-3\sqrt{u}\sin(v)) - \frac{3}{2\sqrt{u}}\cos(v)\cdot 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{u}}\cos(v)\cdot 2\sqrt{u}\cos(v) - \frac{1}{\sqrt{u}}\sin(v)\cdot(-3\sqrt{u}\sin(v)) \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} -2\sqrt{u}\cos(v) \\ -3\sqrt{u}\sin(v) \\ 3(\cos^2(v)+\sin^2(v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{u}\cos(v) \\ -3\sqrt{u}\sin(v) \\ 3 \end{pmatrix}.$$

V. $\vec{n}(u,v)$ ist parallel zu $(1,0,1)$ genau dann, wenn $-2\sqrt{u}\cos(v) = 3$ und $-3\sqrt{u}\sin(v) = 0$. Es folgt, dass $\sin(v) = 0$ (also $v = 0$ oder $v = \pi$) sein muss und $0 \leq \sqrt{u} = -\frac{3}{2\cos(v)}$. Damit kommt also nur $v = \pi$ in Frage und $u = \frac{9}{4}$. Dies entspricht dem Punkt $(-\frac{9}{2}, 0, \frac{9}{4})$. (Man überzeuge sich mit Hilfe einer Probe davon, dass in diesem Punkt der Normalenvektor tatsächlich zu $(1,0,1)^T$ parallel ist.

c) Kühlturm

I. Skizze des Kühlturms

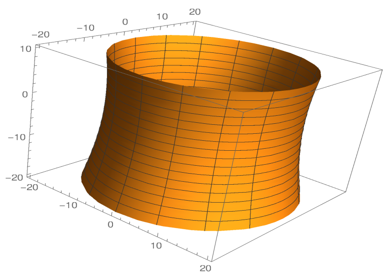

Abbildung 4: Kühlturm / Hyperboloid

II. Wir verwenden wieder Zylinderkoordinaten. In diesen lautet die den Kühlturm beschreibende Gleichung

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} + 300 \text{ bzw. } \left(\frac{r}{\sqrt{300}}\right)^2 - \left(\frac{z}{\sqrt{1200}}\right)^2 = 1,$$

was mithilfe der Areafunktionen parametrisiert werden kann:

$$\frac{r}{\sqrt{300}} = \cosh(u), \quad \frac{z}{\sqrt{1200}} = \sinh(u).$$

Damit haben wir:

$$\begin{aligned}\vec{r}(u,v) &= (r\cos(v), r\sin(v), z) \\ &= (10\sqrt{3}\cosh(u)\cos(v), 10\sqrt{3}\cosh(u)\sin(v), 20\sqrt{3}\sinh(u))\end{aligned}$$

Nun soll noch die z-Koordinate zwischen -20 und 10 verlaufen, d.h.

$$-20 \leq 20\sqrt{3}\sinh(u) \leq 10.$$

Damit ist $-\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq u \leq \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ (und $0 \leq v < 2\pi$).

III. In der Skizze 4 sind einige Koordinatenlinien für konstanten Winkel v und für konstante Höhe (was äquivalent zu konstantem u ist), eingezeichnet.

IV. Für $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ erhalten wir

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} 10\sqrt{3}\sinh(u)\cos(v) \\ 10\sqrt{3}\sinh(u)\sin(v) \\ 20\sqrt{3}\cosh(u) \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -10\sqrt{3}\cosh(u)\sin(v) \\ 10\sqrt{3}\cosh(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dies liefert

$$\begin{aligned}
\vec{n}(u,v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \begin{pmatrix} 10\sqrt{3}\sinh(u)\cos(v) \\ 10\sqrt{3}\sinh(u)\sin(v) \\ 20\sqrt{3}\cosh(u) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10\sqrt{3}\cosh(u)\sin(v) \\ 10\sqrt{3}\cosh(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 10\sqrt{3}\sinh(u)\sin(v)\cdot 0 - 20\sqrt{3}\cosh(u)\cdot 10\sqrt{3}\cosh(u)\cos(v) \\ 20\sqrt{3}\cosh(u)\cdot(-10\sqrt{3}\cosh(u)\sin(v)) - 10\sqrt{3}\sinh(u)\cos(v)\cdot 0 \\ 10\sqrt{3}\sinh(u)\cos(v)\cdot 10\sqrt{3}\cosh(u)\cos(v) - 10\sqrt{3}\sinh(u)\sin(v)\cdot(-10\sqrt{3}\cosh(u)\sin(v)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -600\cosh^2(u)\cos(v) \\ -600\cosh^2(u)\sin(v) \\ 300\cosh(u)\sinh(u). \end{pmatrix} = 300\cosh(u) \begin{pmatrix} -2\cosh(u)\cos(v) \\ -2\cosh(u)\sin(v) \\ \sinh(u) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(Bemerke, dass $\cosh(u) \neq 0$, was auch immer u ist.)

V. Der Normalenvektor steht parallel zu $(1,0,1)$ genau dann, wenn

$$-2\cosh(u)\cos(v) = \sinh(u) \text{ und } -2\cosh(u)\sin(v)$$

gilt. Folglich ist $v = 0$ oder $v = \pi$ und $\sinh(u) = \pm 2\cosh(u)$. Mit der Eigenschaft $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$ folgt, dass $-3\cosh^2 = 1$, was keine Lösung besitzt. Folglich gibt es keinen Punkt auf dem gesamten Hyperboloid (nicht nur dem Kühlturm), in welchem der Normalenvektor parallel zu $(1,0,1)$ steht.

6. **a)** Man rechnet nach, dass

$$(r-R)^2 + z^2 = (a\cos(v))^2 + (a\sin(v))^2 = a^2$$

und somit die gegebene Parametrisierung

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} (R + a\cos(v))\cos(u) \\ (R + a\cos(v))\sin(u) \\ a\sin(v) \end{pmatrix}$$

die Gleichung

$$(r-R)^2 + z^2 = a^2$$

erfüllt. u ist der Winkel zwischen der xz-Ebene und der von der z-Achse und dem Punkt (x,y,z) aufgespannten Ebene. Deshalb muss u von 0 bis 2π laufen, um den gesamten Torus zu parametrisieren. Die Halbebene, die von der z-Achse und dem Punkt (x,y,z) festgelegt wird, schneidet den Torus in einem Kreis. v ist der Polarwinkel, der diesen Kreis parametrisiert. Deshalb sollte v ebenfalls von 0 bis 2π laufen.

b) Wie oben schon bemerkt, gibt u an, wie weit um die z-Achse gedreht wurde, während v angibt, wie weit um den Drehkreis gedreht wurde. Damit sind die u-Koordinatenlinien ($v =$ konst.) die großen horizontalen Kreise, während die v-Koordinatenlinien ($u =$ konst.) die kleinen vertikalen Kreise sind.

c) Damit

$$\begin{pmatrix} R + a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} (R + a\cos(v))\cos(u) \\ (R + a\cos(v))\sin(u) \\ a\sin(v) \end{pmatrix},$$

muss gelten:

$$\begin{aligned} \sin(u) &= 0, \\ \sin(v) &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ (R + a\cos(v))\cos(u) &= R + a\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Dies impliziert $u = 0$ oder $u = \pi$. Da $R + a\frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0$, muss $\cos(u) \geq 0$ und somit $u = 0$ sein. Ferner ist $v = \frac{\pi}{4}$ oder $v = \frac{3\pi}{4}$. Da $\cos(v) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, kommt nur $v = \frac{\pi}{4}$ in Frage. Eine Probe zeigt, dass in der Tat $\vec{r}(0, \frac{\pi}{4}) = (R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2})$.
Nun bestimmen wir einen Einheitsnormalenvektor mithilfe des Kreuzproduktes der Vektoren $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= \begin{pmatrix} -(R + a\cos(v))\sin(u) \\ (R + a\cos(v))\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \begin{pmatrix} -a\sin(v)\cos(u) \\ -a\sin(v)\sin(u) \\ a\cos(v) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

An der Stelle $(u, v) = (0, \frac{\pi}{4})$ ergibt dies

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(0, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} 0 \\ R + a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(0, \frac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} -a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Folglich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(0, \frac{\pi}{4}) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(0, \frac{\pi}{4}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ R + a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (R + a\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-a\frac{\sqrt{2}}{2}) - 0 \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \cdot 0 - a\frac{\sqrt{2}}{2}(-a\frac{\sqrt{2}}{2}) \end{pmatrix} = \big(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}\big)a\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normierung liefert als Einheitsnormalenvektor

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) Da $\mathcal{T}$ aus genau den Punkten besteht, für die $(r - R)^2 + z^2 = a^2$ gilt und $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist, kann $\mathcal{T}$ als Nullstellenmenge der Funktion

$$g(x, y, z) = \big(\sqrt{x^2 + y^2} - R\big)^2 + z^2 - a^2$$

dargestellt werden.

e) Es gilt für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ (aber $(0,0,0)$ liegt eh nicht auf $\mathcal{T}$):

$$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2\big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2\big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Da der Gradient senkrecht auf der Niveaufläche steht, liefert Normierung von $\nabla g(x,y,z)$ einen Einheitsnormalenvektor an den Torus, wenn $(x,y,z) \in \mathcal{T}$. Für $(x,y,z) = (R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2})$ erhalten wir:

$$\nabla g(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{pmatrix} 2a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 2a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\big\|\nabla g(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2})\big\| = 2a.$$

Somit erhalten wir als Einheitsnormalenvektor

$$\frac{\nabla g(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2})}{\big\|\nabla g(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2})\big\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

wie oben.