# Lösung zu Serie 10

**1. Flächeninhalt parametrisierter Flächen**

**a)** Da die Ebene im Inneren eines Zylinders liegt, verwenden wir Zylinderkoordinaten

$$a(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 1 - \frac{1}{2} r\sin\theta),$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $0 \leq r < 1$. Dabei haben wir verwendet, dass die Punkte auf der Ebene $y + 2z = 2$ liegen und somit insbesondere $z = 1 - \frac{1}{2}y = 1 - \frac{1}{2}r\sin\theta$ mit den entsprechenden Koordinaten. (Man vergleiche auch mit Aufgabe 4a von Serie 9.) Dann ist

$$\begin{aligned} a_r(r,\theta) \times a_\theta(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -\frac{1}{2}\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ -\frac{1}{2}r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}r\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{2}r\sin\theta\cos\theta \\ \frac{1}{2}r\sin^2\theta + \frac{1}{2}r\cos^2\theta \\ r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit lautet das Flächenelement $dA$

$$dA = |a_r(r,\theta) \times a_\theta(r,\theta)|\ dr\, d\theta = \sqrt{\frac{1}{4}r^2 + r^2}\, dr\, d\theta = r\frac{\sqrt{5}}{2}\, dr\, d\theta.$$

Dadurch ist der Flächeninhalt von $S$

$$\iint_S dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} r\, dr\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot 2\pi \cdot \left[r^2\right]_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi.$$

**b)** Wir parametrisieren die Fläche wie folgt

$$a(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2r)$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $1 \leq r \leq 3$. Hierbei haben wir verwendet, dass ein Punkt auf dem Kegelstumpf $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ erfüllt und somit ist $z = 2r$ in parametrisierten Koordinaten. Desweiteren ist $2 \leq z \leq 6$ und somit $2 \leq 2r \leq 6$ also $1 \leq r \leq 3$. (Man vergleiche mit Aufgabe 4b von Serie 9.) Für das Flächenelement $dA$ berechnen wir

$$\begin{aligned} a_r(r,\theta) \times a_\theta(r,\theta) &= \big(\cos\theta, \sin\theta, 2\big) \times \big(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0\big) \\ &= \begin{pmatrix} -2r\cos\theta \\ -2r\sin\theta \\ r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit

$$dA = |a_r(r,\theta) \times a_\theta(r,\theta)|\ dr\, d\theta = \sqrt{4r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta + r^2}\, dr\, d\theta = \sqrt{5}r\, dr\, d\theta.$$

Dann ist der Flächeninhalt von $S$

$$\iint_S dA = \int_0^{2\pi}\int_1^3 \sqrt{5}r\,dr\,d\theta = \sqrt{5}2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^3 = 2\pi\sqrt{5}\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right) = 8\pi\sqrt{5}.$$

**c)** Wir parametrisieren die Fläche als

$$a(u,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, u),$$

mit $0 \le \theta < 2\pi$ und $1 \le u \le 4$, wobei $z = u$ (vgl. Aufgabe 4c von Serie 9) . Dann ist $dA = dr\,d\theta$ und somit der Flächeninhalt

$$\int_0^{2\pi}\int_1^4 du\,d\theta = 2\pi\,[u]_1^4 = 2\pi(4-1) = 6\pi.$$

Das kann man jedoch auch direkt sehen, da ein Kreiszylinderband Obefläche $2\pi rh$ hat, wobei $r$ den Radius des Kreisringes und $h$ die Höhe bezeichnet.

**d)** Wir parametrisieren die Fläche mittels Zylinderkoordinaten

$$a(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2-r^2)$$

mit $0 \le \theta < 2\pi$ und $0 \le r \le 1$. Hier haben wir verwendet, dass $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$ in parametrisierten Koordinaten. Die Bedingung an den Radius $r$ ergibt sich daraus, dass die parabolische Kappe begrenzt wird durch einen Kreis gegeben durch die Gleichung $z = r = 2 - r^2$. Dadurch muss $0 \le r \le 2 - r^2$ und somit $0 \le r \le 1$ sein. (Man vergleiche auch mit Aufgabe 4d von Serie 9.) Das Flächenelement $dA$ ermitteln wir mithilfe von

$$\begin{aligned} a_r(r,\theta)\times a_\theta(r,\theta) &= \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ -2r\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2r^2\cos\theta\\ 2r^2\sin\theta\\ r\cos^2\theta + r\sin^2\theta\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$dA = \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4\sin^2\theta + r^2}\,dr\,d\theta = r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta.$$

Der Flächeninhalt der Fläche $S$ ist somit

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{4r^2+1}\,dr\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{8}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

**e)** Ein Kegel mit Spitze im Kugelmittelpunkt schneidet aus der Kugel einen Kugelsektor heraus. Da $\phi$ genau der Winkel zwischen der postiven $z$-Halbachse und dem Ortsvektor eines Punktes auf der Kugel beschreibt, müssen wir nur herausfinden, bei welchem Winkel sich Kegel und Kugeloberfläche schneiden. Dies ist gerade der Öffnungswinkel des Kegels. Der Kegel ist nach oben geöffnet und erfüllt $\tan\theta = \frac{r}{z} = \frac{r}{r} = 1$, da $z = \sqrt{x^2+y^2} = 2$, und somit $\theta = \frac{\pi}{4}$. Ausserdem entnehmen wir der Kugelgleichung, dass $R = \sqrt{2}$. Eine Parametrisierung der Fläche mittels Kugelkoordinaten ist also

$$a(\phi,\theta) = (\sqrt{2}\sin(\phi)\cos(\theta), \sqrt{2}\sin(\phi)\sin(\theta), \sqrt{2}\cos(\phi))$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$ und $\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \pi$. Ausserdem ist das Flächenelement in Kugelparametrisierung gegeben durch $dA = R^2 \sin(\phi)\, d\theta\, d\phi$. Also ist der Flächeninhalt gegeben durch

$$\int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta = 4\pi \left[-\cos\phi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = 4\pi \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi \left(4 + 2\sqrt{2}\right).$$

**f)** Wir wissen aus Aufgabe 6a von Serie 9, dass der gegebene Torus durch

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} \big(R + a\cos(v)\big)\cos(u) \\ \big(R + a\cos(v)\big)\sin(u) \\ a\sin(v) \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq u, v < 2\pi$ parametrisiert werden kann. Mit

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \begin{pmatrix} -(R + a\cos(v))\sin(u) \\ (R + a\cos(v))\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -a\sin(v)\cos(u) \\ -a\sin(v)\sin(u) \\ a\cos(v) \end{pmatrix}$$

(vgl. Aufgabe 6c von Serie 9) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \begin{pmatrix} -(R + a\cos(v))\sin(u) \\ (R + a\cos(v))\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\sin(v)\cos(u) \\ -a\sin(v)\sin(u) \\ a\cos(v) \end{pmatrix} \\ &= \big(R + a\cos(v)\big) a \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ \sin(v). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man bemerke, dass die Länge dieses Vektors gerade $\big(R + a\cos(v)\big)a$ beträgt. Damit ergibt sich für das Flächenelement

$$dA = \big(R + a\cos(v)\big)a \, du \, dv$$

und die Fläche ist demnach:

$$\iint_S dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a\big(R + a\cos(v)\big)\, du\, dv = 2\pi a \underbrace{\int_0^{2\pi} \big(R + a\cos(v)\big)\, dv}_{=2\pi R} = 4\pi^2 Ra.$$

**2. Oberflächenintegrale**

**a)** Da die $z$-Koordinate als Funktion von $x$ und $y$, $z = g(x,y) = 4 - x - y$, geschrieben werden kann, ist das Oberflächenintegral hier gegeben durch

$$\begin{aligned}
\iint_S G(x,y,z)\,dA &= \iint_S G(x,y,g(x,y))\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1\int_0^1 (4-x-y)\sqrt{1+1+1}\,dx\,dy \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 \left[4x-\frac{x^2}{2}-xy\right]_0^1 dy = \sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{7}{2}-y\right)dy \\
&= \sqrt{3}\left[\frac{7}{2}y-\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{3}\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

**b)** Hier verwenden wir wieder, dass $y = g(x,z) = x^2$ und somit ist das gesuchte Integral gegeben durch

$$\begin{aligned}
\iint_S G(x,g(x,z),z)\sqrt{g_x^2+g_z^2+1}\,dx\,dz &= \int_0^3\int_0^2 x\cdot\sqrt{4x^2+1}\,dx\,dz \\
&= \int_0^3 \left[\left(4x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\right]_0^2 dz \\
&= \int_0^3 \frac{1}{12}\left((16+1)^{\frac{3}{2}}-1\right)dz \\
&= 3\cdot\frac{1}{12}(17\sqrt{17}-1) = \frac{1}{4}\left(17\sqrt{17}-1\right).
\end{aligned}$$

**c)** Hier verwenden wir Kugelkoordinaten mit $\phi$ und $\theta$ als Parameter mit Flächenelement $R^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta$, wobei hier $R=1$. Dann ist $x = \sin\phi\cos\theta$

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\,dA &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin\phi\cos\theta)^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos^2\theta\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi = \pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass $\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta = \pi$ und $\int_0^{\pi}\sin^3\phi\,d\phi = \frac{4}{3}$. Das kann man zum Beispiel mit den trigonometrischen Formeln

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta)\right) \\
\sin^3\phi &= \frac{1}{4}\left(3\sin\phi-\sin(3\phi)\right)
\end{aligned}$$

oder partieller Integration ermitteln. *Bemerkung:* Aus Symmetriegründen ist

$$\iint_S x^2\,dA = \iint_S y^2\,dA = \iint_S z^2\,dA.$$

Andererseits ist

$$4\pi = \iint_S dA = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\,dA = 3\iint_S x^2\,dA.$$

**d)** Die naheliegendste Parametrisierung ergibt sich durch die Darstellung der Ebene $S$ als Graph der Funktion $g:\ (x,y)\mapsto\sqrt{4+x^2+y^2}$. Dann ist $z=g(x,y)$ und insbesondere

$$\begin{aligned}\sqrt{g_x^2+g_y^2+1} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}\right)^2+1}\\ &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{4+x^2+y^2}+1}.\end{aligned}$$

Außerdem ergeben sich die Integralgrenzen

$$|x|\leq\sqrt{5},\quad |y|\leq\sqrt{5-x^2}$$

und somit das Integral gegeben durch

$$\begin{aligned}&\iint_S G(x,y,g(x,y))\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}\,dx\,dy\\ &\qquad=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{5-x^2}}\frac{1}{\sqrt{4+2x^2+2y^2}}\sqrt{\frac{4+2x^2+2y^2}{4+x^2+y^2}}\,dy\,dx\\ &\qquad=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\int_{-\sqrt{5-x^2}}^{\sqrt{5-x^2}}\frac{dy\,dx}{\sqrt{4+x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Durch Einführen von Polarkoordinaten geht dieses Integral über in

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\frac{r\,dr\,d\theta}{\sqrt{4+r^2}}=2\pi\int_0^{\sqrt{5}}\frac{r\,dr}{\sqrt{4+r^2}}=2\pi\ \sqrt{4+r^2}\Big|_0^{\sqrt{5}}=2\pi.$$

**e)** Die Fläche $S$ kann beispielsweise mithilfe von Zylinderkoordinaten

$$(x,y,z)=(r\cos(\theta),r\sin(\theta),z),\qquad r=\sqrt{x^2+y^2},$$

parametrisiert werden. Es gilt

$$z^2=4-4x^2-4y^2=4\left(1-r^2\right),$$

also $r=\sqrt{1-z^2/4}$ für $-2\leq z\leq 2$. Eine Parametrisierung ist also durch

$$a(z,\theta)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\cos(\theta)\\ \sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\sin(\theta)\\ z\end{pmatrix},\qquad -2\leq z\leq 2,\quad 0\leq\theta<2\pi,$$

gegeben. Für Punkte $(x,y,z)$ auf $S$ gilt

$$\sqrt{1+3x^2+3y^2}=\sqrt{1+3\left(1-\frac{z^2}{4}\right)}=\sqrt{4-\frac{3z^2}{4}}=2\sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}.$$

Ferner gelten

$$a_z(z,\theta)=\begin{pmatrix}\frac{-z}{4\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}\cos(\theta)\\ \frac{-z}{4\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}}\sin(\theta)\\ 1\end{pmatrix},\qquad a_\theta(z,\theta)=\begin{pmatrix}-\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\sin(\theta)\\ \sqrt{1-\frac{z^2}{4}}\cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix},$$

also

$$a_z(z,\theta)\times a_\theta(z,\theta)=\Big(-\sqrt{1-\tfrac{z^2}{4}}\cos(\theta),\quad -\sqrt{1-\tfrac{z^2}{4}}\sin(\theta),\quad -\tfrac{z}{4}\Big)^T$$

und damit $|a_z(z,\theta)\times a_\theta(z,\theta)|=\sqrt{1-\dfrac{z^2}{4}+\dfrac{z^2}{16}}=\sqrt{1-\dfrac{3z^2}{16}}$.

Das Oberflächenintegral ist demnach

$$\begin{aligned}\iint_S\sqrt{1+3x^2+3y^2}\,d\sigma&=\int_0^{2\pi}\int_{-2}^{2}2\sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}\sqrt{1-\frac{3z^2}{16}}\,dz\,d\theta\\&=4\pi\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{3z^2}{16}\right)dz=12\pi.\end{aligned}$$

**Alternativ** lässt sich die Fläche $S$ auch mithilfe von verallgemeinerten Kugelkoordinaten parametrisieren. Eine solche Parametrisierung ist z.B. durch

$$g(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}\sin(\phi)\cos(\theta)\\ \sin(\phi)\sin(\theta)\\ 2\cos\phi\end{pmatrix},\qquad 0\le\theta<2\pi,\quad 0\le\phi\le\pi,$$

gegeben. Mit $\sqrt{1+3\,(x^2+y^2)}=\sqrt{1+3\sin^2(\phi)}$ und

$$g_\theta(\theta,\phi)=\begin{pmatrix}-\sin(\phi)\sin(\theta)\\ \sin(\phi)\cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix},\qquad g_\phi(\theta,\phi)\begin{pmatrix}\cos(\phi)\cos(\theta)\\ \cos(\phi)\sin(\theta)\\ -2\sin(\phi)\end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned}&|g_\theta(\theta,\phi)\times g_\phi(\theta,\phi)|\\&=\sqrt{\big(-2\cos(\theta)\sin^2(\phi)\big)^2+\big(-2\sin(\theta)\sin^2(\phi)\big)^2+(-\sin(\phi)\cos(\phi))^2}\\&=\sqrt{4\sin^4(\phi)+\sin^2(\phi)\cos^2(\phi}=\sin\phi\sqrt{4\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)}=\sin(\phi)\sqrt{1+3\sin^2(\phi)},\end{aligned}$$

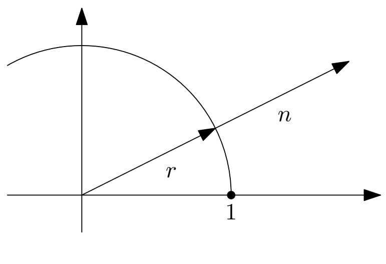
folgt ebenfalls

$$\begin{aligned}\iint_S\sqrt{1+3x^2+3y^2}\,d\sigma&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(\phi)\left(1+3\sin^2(\phi)\right)d\phi\,d\theta\\&=2\pi\int_0^{\pi}\left(\sin(\phi)+3\sin^3(\phi)\right)d\phi=12\pi.\end{aligned}$$

**3. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern**

Wir bemerken zunächst, dass für die Teilaufgaben **a)** und **b)** die Grundflächen der beiden Körper zusammenfallen und von der Einheitskreisscheibe $\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3|\ x^2+y^2\le 1\}$ in der $xy$-Ebene gebildet werden. Der Fluss des Radiusvektors durch diese Fläche verschwindet, da er überall orthogonal zur Flächennormalen ist.

**a)** Der Radiusvektor verläuft auf der Hemisphäre überall parallel zur Flächennormalen. Der Fluss des Radiusvektors entspricht daher gerade dem Flächeninhalt der Hemisphäre.



Parametrisieren wir die Hemisphäre durch

$$f(\phi,\theta) = (\sin(\phi)\cos(\theta), \sin(\phi)\sin(\theta), \cos(\phi))^T, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}.$$

Damit ergibt sich

$$f_\theta(\phi,\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } f_\phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi)\sin(\theta) \\ -\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

Dies liefert:

$$f_\phi(\phi,\theta) \times f_\theta(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin^2(\phi)\cos(\theta) \\ \sin^2(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix},$$

Dann ergibt sich für das Flächenelement

$$\begin{aligned} |f_\phi(\phi,\theta) \times f_\theta(\phi,\theta)| &= \sqrt{\sin^4(\phi) + \sin^2(\phi)\cos^2(\phi)} \\ &= \sin(\phi)\sqrt{\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)} = \sin(\phi), \end{aligned}$$

was genau das bereits bekannte Flächenelement in Kugelkoordinaten, nämlich

$$dA = R^2 \sin\phi \, d\phi \, d\theta \text{ (wobei hier } R = 1),$$

liefert. So ergibt sich für diesen Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f_\phi(\phi,\theta) \times f_\theta(\phi,\theta)| \, d\phi \, d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi) \, d\phi = -2\pi \cos(\phi)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

**b)** Wir parametrisieren das Paraboloid durch

$$f(\theta,s) = (s\cos(\theta), s\sin(\theta), 1-s^2)^T, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le s \le 1.$$

Mit

$$\vec{r}(f(\theta,s)) = f(\theta,s) = \begin{pmatrix} s\cos(\theta) \\ s\sin(\theta) \\ 1-s^2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$f_\theta(\theta,s) = \begin{pmatrix} -s\sin(\theta) \\ s\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sowie } f_s(\theta,s) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ -2s \end{pmatrix}$$

und dies liefert

$$f_s(\theta,s) \times f_\theta(\theta,s) = \begin{pmatrix} 2s^2\cos(\theta) \\ 2s^2\sin(\theta) \\ s \end{pmatrix}$$

ergibt sich für den Fluss

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} s\cos(\theta) \\ s\sin(\theta) \\ 1-s^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2s^2\cos(\theta) \\ 2s^2\sin(\theta) \\ s \end{pmatrix} d\theta\, ds = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(2s^3 + s - s^3\right) d\theta\, ds$$
$$= 2\pi \int_0^1 \left(s^3 + s\right) ds$$
$$= 2\pi \left(\frac{s^4}{4} + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2}.$$

**c)** Wir parametrisieren die Fläche mithilfe verallgemeinerter Kugelkoordinaten:

$$\vec{r} : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{r}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) \\ 2\sin(\phi)\sin(\theta) \\ 3\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

mit

$$\vec{r}_\phi(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\phi)\cos(\theta) \\ 2\cos(\phi)\sin(\theta) \\ -3\sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_\theta(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi)\sin(\theta) \\ 2\sin(\phi)\cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und also

$$\vec{r}_\phi(\phi,\theta) \times \vec{r}_\theta(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} 6\sin^2(\phi)\cos(\theta) \\ 3\sin^2(\phi)\sin(\theta) \\ 2\sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Mit $\vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) = \begin{pmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) \\ 18\cos^2(\phi) \end{pmatrix}$ ergibt sich für den Fluss

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \vec{F}(\vec{r}(\phi,\theta)) \cdot \vec{r}_\phi(\phi,\theta) \times \vec{r}_\theta(\phi,\theta)\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) \\ 18\cos^2(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6\sin^2(\phi)\cos(\theta) \\ 3\sin^2(\phi)\sin(\theta) \\ 2\sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix} d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(6\sin^3(\phi)\cos^2(\theta) + 3\sin^3(\phi)\sin^2(\theta) + 36\sin(\phi)\cos^3(\phi)\right) d\phi\, d\theta$$
$$= 6 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\phi)\, d\phi + 3 \cdot \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\phi)\, d\phi + 36 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\phi)\cos^3(\phi)\, d\phi$$
$$= \frac{6\pi}{4} \left[-3\cos(\phi) + \frac{1}{3}\cos(3\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi}{4}\frac{1}{4} \left[-3\cos(\phi) + \frac{1}{3}\cos(3\phi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 18\pi \left[-\frac{\cos^4(\phi)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{6\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} + 18\pi \cdot \frac{1}{4} = 6\pi,$$

wobei wir $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4}$ sowie $\sin^3(\phi) = \frac{1}{4}\left(3\sin(\phi) - \sin(3\phi)\right)$ benutzt haben.

**4. Überprüfung des Satzes von Stokes**

**a)** Nach dem Satz von Stokes sollte der Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ von innen nach außen durch $S$ mit dem Fluss von $\vec{F}$ entlang der gegen den Uhrzeigersinn (wenn man aus positiver $z$ schaut) durchlaufenen Kurve $C$, die $S$ berandet, übereinstimmen. In dieser Teilaufgaben soll dieses Linienintegral über die Kurve $C$ berechnet werden. Dazu parametrisieren wir $C$ als $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0),$$

woraus sich sofort

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0).$$

ergibt.

Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\gamma(t)\right) \cdot \vec{\gamma}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \cdot \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0\end{aligned}$$

**b)** In dieser Teilaufgaben soll der Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ von innen nach außen durch $S$ direkt mit der Definition berechnet werden. Bemerke, dass sich die Rotation von $\vec{F}$ zu

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_y(xy) - \partial_z(-xz) \\ \partial_z(yz) - \partial_x(xy) \\ \partial_x(-xz) - \partial_y(yz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -2z \end{pmatrix}$$

berechnet. Ferner parametrisieren wir das halbe Ellipsoid mit Hilfe von verallgemeinerten Kugelkoordinaten:

$$\vec{r}(\theta, \phi) := \begin{pmatrix} \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\sin(\phi) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\phi) \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \theta < 2\pi.$$

Mit

$$\partial_\phi \vec{r}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) \\ -\frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\phi) \end{pmatrix} \text{ und } \partial_\theta \vec{r}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$\partial_\phi \vec{r}(\theta, \phi) \times \partial_\theta \vec{r}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\theta)\sin^2(\phi) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\theta)\sin^2(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Dies liefert als Flächenelement

$$dA = \sqrt{\frac{1}{8}\sin^4(\phi) + \sin^2(\phi)\cos^2(\phi)}\, d\theta\, d\phi = \sin(\phi)\sqrt{\frac{1}{8}\sin^2(\phi) + \cos^2(\phi)}\, d\theta\, d\phi$$

und als nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor

$$\vec{n}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sin(\phi)\sqrt{\frac{1}{8}\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi)}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\theta)\sin^2(\phi) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\theta)\sin^2(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Für den gesuchten Fluss der Rotation erhalten wir damit

$$\begin{aligned}\iint_S \big(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\big)\,dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{8}}\cos(\phi)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\theta)\sin^2(\phi) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\theta)\sin^2(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix} d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \frac{2}{\sqrt{8}}\big(\cos^2(\theta)\sin^3(\phi) - \sin(\phi)\cos^2(\phi)\big)\,d\theta\,d\phi \\
&= \frac{2}{\sqrt{8}}\Bigg[\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(\phi)\,d\phi}_{=\frac{2}{3}}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta}_{=\pi} - 2\pi\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\phi)\big(1-\sin^2(\phi)\big)\,d\phi}_{=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}\Bigg] = 0.\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3(\phi)\,d\phi &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\sin(\phi)-\sin(\phi)\cos^2(\phi)\big)\,d\phi \\
&= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2\phi)}{2}\cos(\phi)\,d\phi = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(3\phi)+\sin(\phi)}{4}\,d\phi \\
&= 1 + \left[\frac{\cos(3\phi)}{12}+\frac{\cos(\phi)}{4}\right]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

**c)** Mit dem Satz von Stokes folgt,

$$\Phi = \iint\limits_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} = \oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

wobei $C$ die geschlossene Kurve ist, welche $S$ berandet. Das heisst

$$\begin{aligned}C &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+8z^2 = 1,\ z=0\big\} \\ &= \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z=0\big\}\end{aligned}$$

also der Einheitskreis in der $xy$-Ebene. Dieser berandet auch die Einheitskreisscheibe in der $xy$-Ebene. Daher wählen wir als neue Fläche

$$\widetilde{S} = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1, z=0\big\}$$

und parametrisieren wie folgt

$$\begin{aligned}&x = r\cos(\theta),\ \text{wobei } 0\le r\le 1 \\ &y = r\sin(\theta),\ \text{wobei } 0\le\theta<2\pi \\ &z = 0.\end{aligned}$$

Dann ist

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\vec{n} = (0,0,1)$ ein zu $\widetilde{S}$ positiv orientierter Normalenvektor.

Damit berechnet sich der Fluss von $\operatorname{rot}\vec{F}$ durch $\tilde{S}$ zu

$$\begin{aligned}\Phi = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{\widetilde{S}} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{\widetilde{S}} = \iint_{\widetilde{S}} \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\, d\widetilde{S} \\ = \iint_{\widetilde{S}} \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\widetilde{S} = 0.\end{aligned}$$

**5. Linienintegrale via Satz von Stokes**

Der Satz von Stokes besagt, dass

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_Q \left(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\right) dA,$$

wobei $Q = \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 |\ |x|\le 1,\ |y|\le 1\}$ das Quadrat ist.

Man berechnet

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y F_3 - \partial_z F_2 \\ \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y-2z \\ 0-0 \\ -2x+2y\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} y-z \\ 0 \\ -x+y\end{pmatrix}.$$

Dann ist $\vec{n} = (0,0,1)$ ein zur Quadratfläche positiv orientierter Normalenvektor.

Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}\iint_Q \operatorname{rot}\vec{F}\cdot d\vec{S} &= \iint_Q 2\cdot \begin{pmatrix} y-z \\ 0 \\ -x+y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} dS \\ &= 2\iint_Q (-x+y)\, dS = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-x+y)\, dxdy = 0.\end{aligned}$$

**6. Flüsse via Satz von Stokes**

Der Satz von Stokes liefert

$$\iint_S \left(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\right) dA = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

wobei

$$\begin{aligned} C &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = 3,\ x^2+y^2+z^2 = 25\} \\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x = 3,\ y^2+z^2 = 16\}\end{aligned}$$

der Kreis in der Ebene $\{x = 3\}$ mit Radius $r = 4$ ist (durchlaufen im mathematisch positiven Sinne, wenn aus positiver $z$-Richtung draufblickend).
Wir parametrisieren $C$ als $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\gamma(t) = (3, 4\cos(t), 4\sin(t))$$
$$\gamma'(t) = (0, -4\sin(t), 4\cos(t)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}\left(\gamma(t)\right) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 8\cos(t) \\ -4\sin(t) \\ 3 - 4\cos(t) - 4\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4\sin t \\ 4\cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(16\sin^2(t) + 12\cos(t) - 16\cos^2 t - 16\cos(t)\sin(t)\right)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 12\cos(t)\, dt = 0.
\end{aligned}$$