Lösung zu Serie 11

1. Es sei K der in der Aufgabe gegebene Kreiszylinder. Der Satz von Gauß liefert, der Fluß von $\vec{F}$ von innen nach außen durch den Rand ∂K von K

$$\Phi_K = \int_{\partial K} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$$

genauso gut mit der Formel

$$\Phi_K = \iiint_K \operatorname{div}(\vec{F})\, dK$$

berechnet werden kann. Es ergibt sich:

$$\operatorname{div}(\vec{F})(x,y,z) = xz\sin y - xz\sin y + e^{x^2+y^2} = e^{x^2+y^2}.$$

Wir parametrisieren den Kreiszylinder mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z = z,$$

wobei $\theta \in [0, 2\pi)$, $r \in (0, \sqrt{2}]$ und $z \in [0, 3]$ (dies folgt aus der gegebenen Grundfläche D). Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi_K &= \iiint_K e^{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} e^{r^2}\, r\, dr\, d\theta\, dz \\ &= 3 \cdot 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} re^{r^2} dr = 3\pi[e^{r^2}]_0^{\sqrt{2}} = 3\pi(e^2 - 1),\end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\frac{d}{dr}\left(e^{r^2}\right) = 2re^{r^2}$ gilt.

2. Im Folgenden sei H die Halbkugel, S die gegebene halbe Sphäre und E die Äquatorebene. Der Satz von Gauß liefert

$$\Phi_S + \Phi_E = \Phi_{\partial H} = \int_H \div \vec{F}\, dH.$$

Man berechnet

$$\operatorname{div}(\vec{F})(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = (1 - e^z) + 0 + e^z = 1.$$

Daher ist

$$\int_H \operatorname{div}(\vec{F})\, dH = \int_H dH = \operatorname{Vol}(H) = \frac{2}{3}\pi.$$

Um den Fluss Φ_S durch S zu ermitteln, müssen wir also den Fluss Φ_E durch die Äquatorebene bestimmen. Dazu parametrisieren wir E wie folgt:

$$\begin{aligned} E &: (0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \\ E(r,\theta) &= \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, dass der Fluss von $\vec{F}$ von oben nach unten durch E zu bestimmen ist, da der äußere Einheitsnormalenvektor bzgl. H auf E gegeben ist durch $(0,0,-1)^T$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Phi_E = \oint_E \vec{F} d\vec{E} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos(\theta)(1-e^0) \\ 0 \\ e^0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} r\,d\theta\,dr \\ &= -\int_0^1 \int_0^{2\theta} r\,d\theta\,dr = -\pi.\end{aligned}$$

Schliesslich erhalten wir für den gesuchten Fluss Φ_S

$$\Phi_S = \Phi_{\partial H} - \Phi_E = \int_H \operatorname{div}(\vec{F})\,dH - \Phi_E = \frac{5}{3}\pi.$$

3. Die Fourierreihe einer Funktion f, die auf $[0,T]$ definiert ist, erhält man wie folgt:

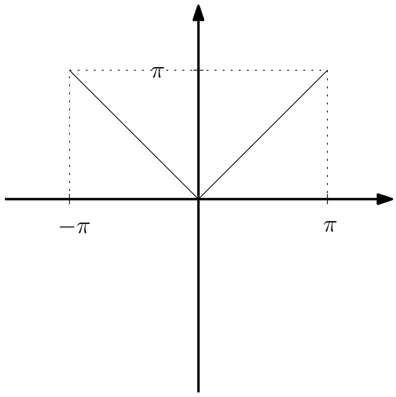
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x),$$

wobei

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx, \\ b_k &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(k\omega x)\,dx \end{aligned}$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

a) Hier ist eine Skizze des Graphen von f_a:



Hier ist $T = 2\pi$. Offenbar ist die 2π-periodische Fortsetzung der Betragsfunktion eine gerade Funktion. Daher besteht sie ausschließlich aus Cosinus-Termen. Wir berechnen die Fourierkoeffizienten

$$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,dx \\ &= 0 + \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi} -\sin(kx)\,dx = \frac{2}{k^2\pi}\left[\cos(kx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k^2\pi}\left[(-1)^k - 1\right]. \end{aligned}$$

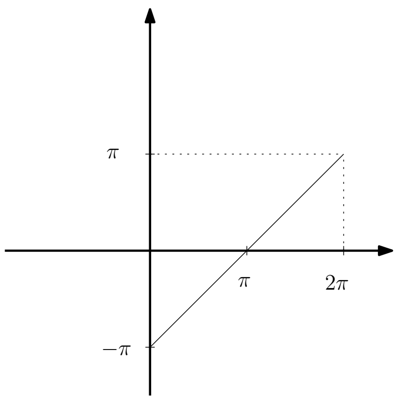
Somit verschwinden die Koeffizienten für $k = 2n$ gerade, $a_{2n} = 0$ und für $k = 2n+1$ ungerade ist

$$a_{2n+1} = \frac{-4}{\pi(2n+1)^2}.$$

Insbesondere ist die Fourierreihe von f_a gegeben durch

$$\mathcal{F}_a(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x).$$

b) Hier ist eine Skizze des Graphen von f_b:



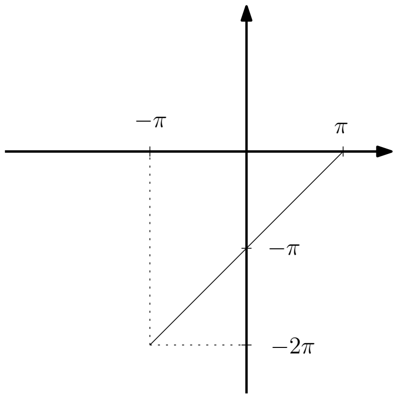
Fourier-Reihe für f_b (hier ist $T = 2\pi$):

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}-\pi x\right]_0^{2\pi} = 0 \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\right) - \underbrace{\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{2\pi}}_{=0} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}\right) = 0 \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\pi\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k} - \underbrace{\left[\frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_0^{2\pi}}_{=0}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} = -\frac{2}{k}
\end{aligned}$$

Dass alle a_k verschwinden liegt daran, dass die periodische Fortsetzung der Funktion ungerade ist. Daher gilt: $f_b(x) = x - \pi$ für $x \in [0, 2\pi]$ hat die Fourierreihe

$$\mathcal{F}_b(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx).$$

c) Hier ist eine Skizze des Graphen von f_c:



Fourierreihe für f_c: Hier ist wieder $T = 2\pi$.

$$
\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-\pi)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_{-\pi}^{\pi} = -\pi \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-\pi)\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\cos(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\right) - \underbrace{\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k^2}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right) = 0 \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-\pi)\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(kx)\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\sin(kx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) - \frac{-\pi}{k}\cos(-k\pi) - \underbrace{\left[\frac{1}{k^2}\sin(kx)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \\
&= (-1)^k\left(-\frac{2}{k}\right)
\end{aligned}
$$

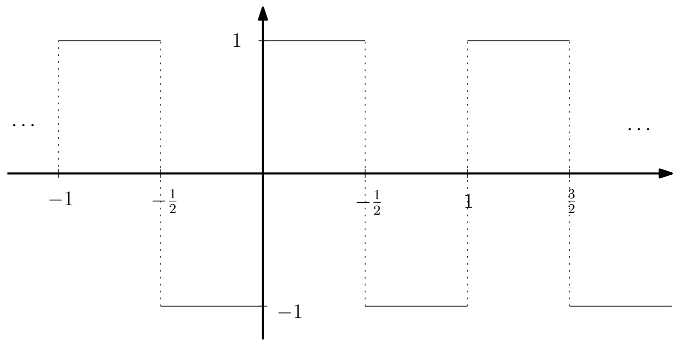
Daher gilt: $f_c(x) = x - \pi$ hat die Fourierreihe

$$\mathcal{F}_c(x) = -\pi - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k} \sin(kx)$$

auf $[-\pi, \pi]$.

Bemerkung: Die um π in y-Richtung verschobene Funktion $f_b + \pi$ ist ungerade. Ihre Fourier-Reihe hat nur Sinus-Terme. Da die Fourierkoeffizienten von f_b bis auf a_0 genau die gleichen sind, verschwinden alle a_i für $i \geq 1$ und $a_0 = 0 - \frac{\pi}{2}$.

d) Hier ist eine Skizze des Graphen von f_d:



Man sieht, dass die Periode hier $T = 1$ und somit $\omega = 2\pi$ ist. Wählen wir also zum Beispiel die Fourierreihe auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_d(x) \mathrm{d}x \\
&= -\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x = 0 \\
a_k &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_d(x) \cos(2k\pi x) \mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \cos(2k\pi x) \mathrm{d}x + 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \cos(2k\pi x) \mathrm{d}x = 0 \\
&= -\frac{1}{k\pi} [\sin(2k\pi x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} + \frac{1}{k\pi} [\sin(2k\pi x)]_{0}^{\frac{1}{2}} = 0
\end{aligned}$$

Man hätte auch so argumentieren können: Die Funktion ist ungerade und damit auch ihr Produkt mit dem geraden Cosinus. Für ungerade Funktionen verschwindet das

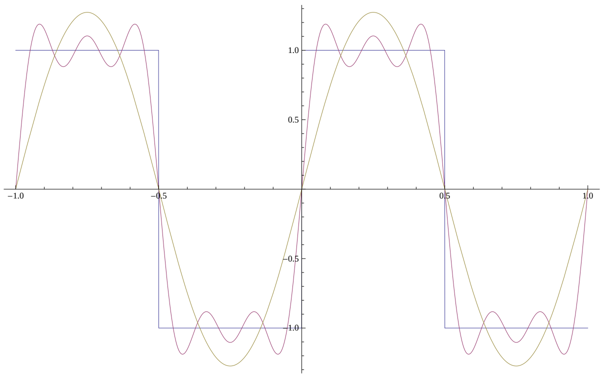


Abbildung 1: Die Funktion f_d und zwei Approximationen mittels Fourierpolynomen.

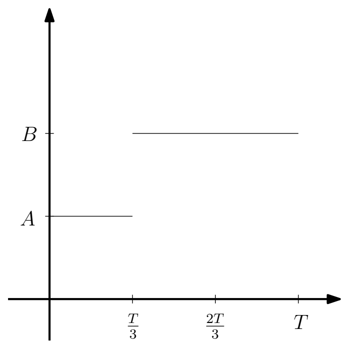
Integral über ein um 0 symmetrisches Intervall.

$$\begin{aligned}
b_k &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_d(x)\sin(2k\pi x)\mathrm{d}x \\
&= -2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \sin(2k\pi x)\mathrm{d}x + 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \sin(2k\pi x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{k\pi}[\cos(2k\pi x)]_{-\frac{1}{2}}^{0} - \frac{1}{k\pi}[\cos(2k\pi x)]_{0}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(\cos(0)-\cos(-k\pi)\right) - \frac{1}{k\pi}\left(\cos(k\pi)-\cos(0)\right) \\
&= \frac{1}{k\pi}\left(2-2\cos(k\pi)\right) = \frac{2}{k\pi}\left(1-(-1)^k\right) \\
&= \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{für ungerade } k\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{für gerade } k\in\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

Man erhält also für die Impulsfunktion die Fourierreihe

$$\mathcal{F}_d(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{2k-1}.$$

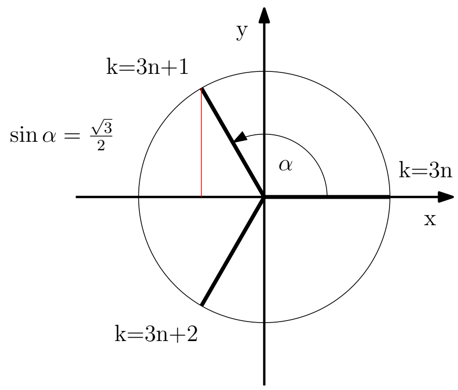
e) Hier ist eine Skizze des Graphen von f_e:



Wir berechnen die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{3}} A\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)\,dx + \int_{\frac{T}{3}}^{T} B\cos\left(\frac{2k\pi x}{T}\right)\,dx\right) \\ &\overset{\text{für } k\neq 0}{=} \frac{2}{T}\frac{T}{2k\pi}\left(A\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - B\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)\right) \\ &= \frac{A-B}{k\pi}\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right) \overset{(*)}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad k = 3n \\ \frac{A-B}{k\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{falls} \quad k = 3n+1 \\ \frac{B-A}{k\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{falls} \quad k = 3n+2. \end{cases} \end{aligned}$$

Hier haben wir in $(*)$ verwendet, dass für die Winkel $\phi = \frac{2k\pi}{3}, \quad k = 1, 2, 3, \cdots$



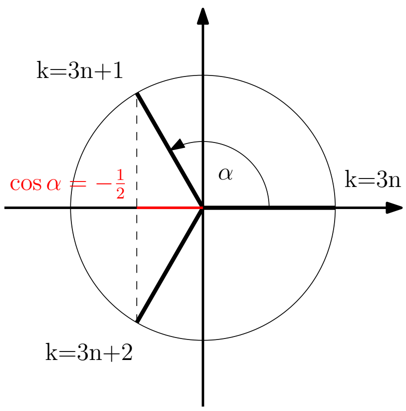
Desweiteren ist

$$a_0 = \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{3}} A\,dx + \int_{\frac{T}{3}}^{T} B\,dx\right) = \frac{2}{T}\left(A\cdot\frac{T}{3} + B\cdot\frac{2T}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(A + 2B\right).$$

und

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{x}{3}} A\sin\frac{2k\pi x}{T}\,dx + \int_{\frac{T}{3}}^{T} B\sin\frac{2k\pi x}{T}\,dx\right)\\
&= \frac{2}{T}\frac{T}{2k\pi}\left(A - A\cos\frac{2k\pi}{3} + B\cos\frac{2k\pi}{3} - B\right)\\
&= \frac{A-B}{k\pi}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{3}\right) \overset{(**)}{=} \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad k = 3n\\ \frac{3(A-B)}{2k\pi}, & \text{sonst.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Hier haben wir in $(**)$ verwendet, dass



4. Wir beobachten, dass die periodische Fortsetzung der auf $[0, 2\pi]$ definierten Funktion $f(x) := (x-\pi)^2$ gerade ist. Damit verschwinden alle Sinusterme in der Fourierreihe. Für Koeffizienten a_k der Cosinusterme rechnen wir nach:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u^2\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}u^3\right]_{-\pi}^{\pi}\\
&= \frac{\pi^2}{3}.
\end{aligned}$$

Für $k \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(kx)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\left[(x-\pi)^2\frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \int_0^{2\pi} 2(x-\pi)\frac{\sin(kx)}{k}\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[2(x-\pi)\frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^{2\pi} - \underbrace{2\int_0^{2\pi}\frac{\cos(kx)}{k^2}\mathrm{d}x}_{\left[2\frac{\sin(kx)}{k^3}\right]_0^{2\pi}=0}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{k^2} - \frac{(-2\pi)}{k^2}\right) = \frac{4}{k^2}.
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f ist also gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} \cos(kx).$$

Man kann zeigen, dass in diesem konkreten Fall die Fourierreihe dieser Funktion gleichmässig gegen die Funktion f konvergiert (das ist nicht trivial! – siehe z.B. A. Zygmund, Trigonometric Series). Damit ergibt sich an der Stelle Null

$$\pi^2 = f(0) = \mathcal{F}(0) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2}$$

und daraus folgt die erstaunliche und "hübsche" Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

die Euler bereits 1748 entdeckt hat.

5. a)

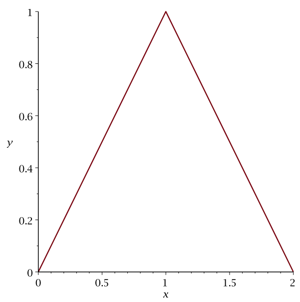


Abbildung 2: Graph von $y = f(x)$ für $L = 2$ und $k = 1$

Wir verwenden die Formeln aus der Vorlesung und berechnen zuerst die Koeffizienten für die gerade Fortsetzung. In diesem Fall ist f eine gerade Funktion mit Periode $2L$, somit sind die Koeffizienten b_n alle gleich 0 und für a_0 gilt:

$$a_0 = \frac{4}{2L} \int_0^L f(x)\,dx = \frac{2}{L} \cdot \frac{kL}{2} = k \ ,$$

weil das Integral hier nichts anderes ist als die Dreiecksfläche des Dreiecks mit Basis

L und Höhe $k(= f(\frac{L}{2}))$. Für die weiteren Koeffizienten a_n mit $n \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{2L}\int_0^L f(x)\cdot\cos\big(\frac{2n\pi x}{2L}\big)\,dx \\
&= \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L}x\cdot\cos\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\,dx + \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2k}{L}(L-x)\cdot\cos\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\,dx \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}x\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\sin\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\right]_0^{\frac{L}{2}} - \frac{2}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}\frac{2k}{L}\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\sin\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\,dx \\
&\quad + \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}(L-x)\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\sin\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\right]_{\frac{L}{2}}^{L} - \frac{2}{L}\int_{\frac{L}{2}}^L\left(-\frac{2k}{L}\right)\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\sin\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\,dx \\
&= \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}x\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\sin\big(\frac{n\pi x}{L}\big) + \frac{2k}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cdot\cos\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\right]_0^{\frac{L}{2}} \\
&\quad + \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}(L-x)\cdot\frac{L}{n\pi}\cdot\sin\big(\frac{n\pi x}{L}\big) - \frac{2k}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cdot\cos\big(\frac{n\pi x}{L}\big)\right]_{\frac{L}{2}}^{L} \\
&= \frac{2}{L}\left(\frac{kL}{n\pi}\sin\big(\frac{n\pi}{2}\big) + \frac{2k}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cdot\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big) - 0 - \frac{2k}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\right) \\
&\quad + \frac{2}{L}\left(0 - \frac{2k}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cdot\cos(n\pi) - \frac{kL}{n\pi}\sin\big(\frac{n\pi}{2}\big) + \frac{2k}{L}\cdot\left(\frac{L}{n\pi}\right)^2\cdot\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big)\right) \\
&= \frac{4k}{(n\pi)^2}\Big(2\cos\big(\frac{n\pi}{2}\big) - 1 - \cos(n\pi)\Big)\ .
\end{aligned}$$

Und somit erhalten wir

$$a_n = \frac{4k}{(n\pi)^2}\begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 4\ell+1 \text{ oder } 4\ell+3\ , \\ -4 & \text{wenn } n = 4\ell+2\ , \\ 0 & \text{wenn } n = 4\ell\ . \end{cases}$$

und damit ist die Fourierreihe der geraden Fortsetzung von f gegeben durch

$$\frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(4\ell+2)^2}\cdot\cos\left(\frac{(4\ell+2)\pi x}{L}\right)\ .$$

Man bemerke, dass für $L = 2\pi$ und $k = \pi$ die Funktion f mit der Funktion f_a aus Aufgabe **2.a)** übereinstimmt. Und tatsächlich erhält man bei Einsetzen dieser Werte in die oben hergeleitete Formel für die Fourierreihe genau die in Aufgabe **2.a)** berechnete Formel.

In der folgenden Abbildung sind ein paar Teilsummen der geraden Fortsetzung skizziert. Man beachte, dass die Fourierreihe überall sehr schnell gegen f konvergiert. Dies liegt daran, dass f nirgends unstetig ist.

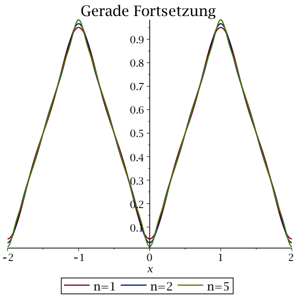


Abbildung 3: Teilsummen der F-R der geraden Fortsetzung von f mit 1, 2 und 5 Termen

b) Mit ähnlichen Überlegungen und Berechnungen kann man zeigen, dass die Koeffizienten der ungeraden Fortsetzung von f gegeben sind durch

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) \\ &= \frac{8k}{n^2\pi^2}\begin{cases} 0 & \text{wenn } n = 2\ell \text{ (d.h. } n \text{ gerade)}, \\ 1 & \text{wenn } n = 2\ell+1 \text{ und } \ell \text{ gerade}, \\ -1 & \text{wenn } n = 2\ell+1 \text{ und } \ell \text{ ungerade}. \end{cases} \end{aligned}$$

Da hier die ungerade $2L$-periodische Fortsetzung betrachtet wird, verschwinden nämlich die a_n und es gilt für die b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx \\ &= \frac{2}{L}\Big[\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L}x\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx + \int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2k}{L}(L-x)\sin\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx\Big] \\ &= \frac{2}{L}\Big\{\underbrace{\Big[-\frac{2k}{L}x\frac{L}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big]_{x=0}^{x=\frac{L}{2}}}_{=-\frac{kL}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2})} + \underbrace{\int_0^{\frac{L}{2}} \frac{2k}{L}\frac{L}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx}_{=\frac{2kL}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})} \\ &+ \underbrace{\Big[-\frac{2k}{L}(L-x)\frac{L}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\Big]_{x=\frac{L}{2}}^{x=L}}_{=\frac{kL}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2})} - \underbrace{\int_{\frac{L}{2}}^L \frac{2k}{L}\frac{L}{n\pi}\cos\Big(\frac{n\pi x}{L}\Big)\,dx}_{=-\frac{2kL}{n\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2})}\Big\} \\ &= \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \frac{8k}{n^2\pi^2}\cdot\begin{cases} 0, & k = 4l,\ l \geq 0, \\ 1, & k = 4l+1,\ l \geq 0, \\ 0, & k = 4l+2,\ l \geq 0, \\ -1 & k = 4l+3,\ l \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Fourierreihe der ungeraden Fortsetzung von f darf wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{8k}{\pi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^2}\cdot\sin\left(\frac{(2\ell+1)\pi x}{L}\right).$$

Untenstehende Abbildung zeigt ein paar Teilsummen.

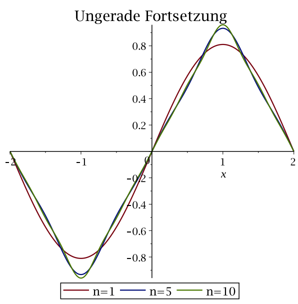


Abbildung 4: Teilsummen der F-R der ungeraden Fortsetzung von f mit 1, 5 und 10 Termen

6. **a)** Hier ist $L = 2\pi$ und da wir die Funktion gerade fortsetzen wollen, besteht die Fourierreihe ausschließlich aus Cosinus-Termen.

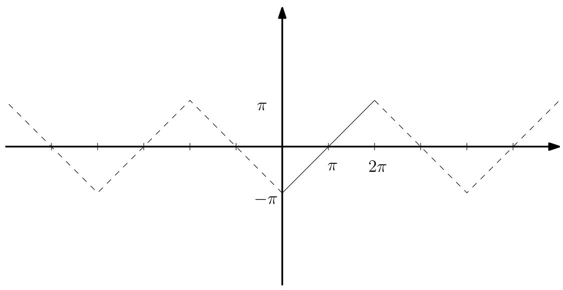


Abbildung 5: Gerade Fortsetzung von g.

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{4}{2L}\int_0^L (x-\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\,dx = 0\\
a_n &= \frac{4}{2L}\int_0^L (x-\pi)\cos\left(\frac{2n\pi x}{4\pi}\right)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\,dx\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\underbrace{\left[(x-\pi)\frac{2}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_{x=0}^{x=2\pi}}_{=0} - \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{2}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)dx}_{=\left[-\frac{4}{n^2}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi}}\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{4}{n^2}(-1)^n - \frac{4}{n^2}\right] = \begin{cases}0, & n=2k \text{ gerade}\\ -\frac{8}{\pi n^2}, & n=2k+1 \text{ ungerade.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Dann ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^2}\cos\Big(\big(k+\frac{1}{2}\big)x\Big).$$

Bemerkung: Man vergleiche, was man erhält, wenn man die Beziehung zwischen der Funktion f hier und der Funktion f_a aus Aufgabe **3.a)** ausnutzt. Es gilt nämlich $\frac{f(2x)}{2} + \frac{\pi}{2} = f_a(x)$.

b) Hier ist $L = 2\pi$. Mittels einer Skizze sieht man, dass die 4π-periodische ungerade Fortsetzung der Funktion dieselbe Funktion wie die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion eingeschränkt auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ ergibt. Mit anderen Worten: Offenbar ist die 2π-periodische Fourierreihe der Funktion in **3.b)** ebenfalls 4π-periodisch und ungerade. Daher erhalten wir dieselbe Fourierreihe wie in **3.b)**.

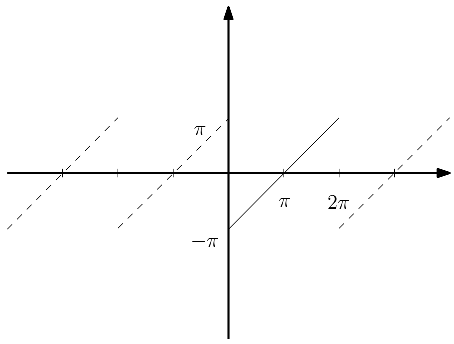


Abbildung 6: Ungerade Fortsetzung von g.

Dies kann durch die konkrete Berechnung der Fourierkoeffizienten bestätigt werden. Da es sich um eine ungerade Fortsetzung handelt, enthält die Fourierreihe nur Sinus-Terme:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L (x-\pi)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[(x-\pi)\frac{-2}{n}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\frac{2}{n}\cos\left(\frac{n}{2}x\right)dx}_{=\left[\frac{4}{n^2}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)\right]_0^{2\pi}=0}\right\} \\ &= -\frac{2}{n}(-1)^n - \frac{2}{n} = \begin{cases} -\frac{4}{n}, & n = 2k \text{ gerade} \\ 0, & n = 2k+1 \text{ ungerade.}\end{cases} \end{aligned}$$

Daher ist die Fourierreihe gegeben durch

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n \text{ gerade}} -\frac{4}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{2k}\sin(kx) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx)$$

und somit dieselbe Fourierreihe wie in **3.b)**.