Lösung zu Serie 12

1. **a)** Wir berechnen die entsprechenden Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \cos(y)\cosh(x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \cos(y)\sinh(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\sin(y)\sinh(x), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -\cos(y)\sinh(x).$$

Damit ist die Summe der beiden Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ gleich 0 und daher erfüllt u, wie behauptet, die Potentialgleichung.

Für w gilt

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{-y}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

und somit ist auch hier die Summe der beiden doppelten Ableitungen gleich 0.

b) Eine direkte Rechnung unter Verwendung von Produkt- bzw. Quotientenregel sowie Kettenregel zeigt

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= \frac{\partial_t[h(x-t)](1-th(x-t)) - h(x-t)\partial_t\big(1-th(x-t)\big)}{(1-th(x-t))^2}\\
&= \frac{-h'(x-t)(1-th(x-t)) - h(x-t)\big(-h(x-t)+th'(x-t)\big)}{(1-th(x-t))^2}\\
&= \frac{-h'(x-t)+(h(x-t))^2}{(1-th(x-t))^2},\\
u_x(x,t) &= \frac{\partial_x[h(x-t)](1-th(x-t)) - h(x-t)\partial_x\big(1-th(x-t)\big)}{(1-th(x-t))^2}\\
&= \frac{h'(x-t)(1-th(x-t)) - h(x-t)(-th'(x-t))}{(1-th(x-t))^2}\\
&= \frac{h'(x-t)}{(1-th(x-t))^2}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$u_t(x,t)+u_x(x,t) = \left(\frac{h(x-t)}{1-th(x-t)}\right)^2 = u^2(x,t).$$

Einsetzen von $t=0$ zeigt ferner, dass für alle $x\in\mathbb{R}$:

$$u(x,0) = \frac{h(x-0)}{1-0\cdot h(x-0)} = h(x).$$

c) Da

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \cos(x+t)\mathrm{e}^t, \\ u_t(x,t) &= \underbrace{\cos(x+t)\mathrm{e}^t}_{=u_x(x,t)} + \underbrace{\sin(x+t)\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t}_{=u(x,t)-1}, \end{aligned}$$

rechnet man unmittelbar nach, dass die Differentialgleichung

$$u_x - u_t + u = 1$$

erfüllt ist. Von der Gültigkeit der Anfangsbedingung überzeugt man sich ebenfalls durch direkte Rechnung:

$$u(x,0) = \big(\sin(x+0) - 1\big)e^0 + 1 = \sin(x) - 1 + 1 = \sin(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. **a)** Um zu überprüfen, für welche c die gegebenen Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind, berechnen wir jeweils die entsprechenden Ableitungen und setzen in die Wellengleichung ein.

(i) Es sind

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = 2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 2.$$

Somit erfüllt u die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ genau dann, wenn $2 = c^2 \cdot 2$, also (da $c > 0$) genau dann, wenn $c = 1$.

(ii) Für die Funktion $w(x,t)$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = a\cos(at)\sin(bx), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = -a^2\sin(at)\sin(bx) \quad \text{und} \\ &\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = b\sin(at)\cos(bx), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = -b^2\sin(at)\sin(bx). \end{aligned}$$

Damit gilt für u die Wellengleichung $u_{tt} = u_{xx}$ genau dann, wenn $a^2 = c^2 \cdot b^2$. Da $c > 0$, ist somit u Lösung der Wellengleichung genau dann, wenn $c = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{|a|}{|b|}$.

b) (i) Wir ermitteln wieder die entsprechenden Ableitungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -e^{-t}\sin(\omega x), \\ &\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \omega e^{-t}\cos(\omega x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\omega^2 e^{-t}\sin(\omega x) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung liefert dies, dass die u genau dann die Wärmeleitungsgleichung $u_t = c^2 u_{xx}$ löst, wenn für alle x die Beziehung

$$-e^{-t}\sin(\omega x) = c^2\left(-\omega^2 e^{-t}\sin(\omega t)\right)$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $c = \dfrac{1}{\omega}$ (da $c, \omega > 0$ vorausgesetzt war).

(ii) Hier sind

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = -\pi^2 e^{-\pi^2 t}\cos(5x),$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = -5e^{-\pi^2 t}\sin(5x), \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = -25e^{-\pi^2 t}\cos(5x).$$

Einsetzen in die Gleichung liefert, dass die Wärmeleitungsgleichung genau dann gilt, wenn die Beziehung

$$-\pi^2 e^{-\pi^2 t}\cos(5x) = c^2\left(-25e^{-\pi^2 t}\cos(5x)\right).$$

für alle x erfüllt ist. Dies ist genau der Fall, wenn $\pi^2 = c^2 \cdot 25$ ist, also genau dann (wegen $c > 0$), wenn $c = \frac{\pi}{5}$.

3. **a)** Wir setzen den vorgeschlagenen Ansatz in die gegebene Gleichung ein und erhalten $v'' - v' + \ddot{w} = 0$ (dabei bezeichnet $'$ die Ableitung nach x und der Punkt die Ableitung nach t) oder äquivalent

$$v'' - v' = -\ddot{w}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstante λ:

$$v'' - v' = \lambda \qquad (3)$$
$$-\ddot{w} = \lambda \qquad (4)$$

Gleichung (3) ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Die zugehörige homogene Gleichung

$$v'' - v' = 0$$

hat das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha$ mit den Nullstellen 1 und 0, d.h.

$$v_h(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^0 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2.$$

Für die partikuläre Lösung machen wir den Ansatz $v_p = ax$. Einsetzen ergibt $-a = \lambda$. Damit folgt

$$v(x) = v_h(x) + v_p(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 - \lambda x.$$

Gleichung (4) löst man, indem man zweimal integriert:

$$\ddot{w} = -\lambda \Rightarrow \dot{w} = -\lambda t + D_1 \Rightarrow w = -\frac{\lambda}{2}t^2 + D_1 t + D_2.$$

Die Lösungen der Form $u(x,t) = v(x) + w(t)$ für die gegebene Gleichung lauten somit

$$u(x,t) = C_1 \mathrm{e}^x - \lambda x - \frac{\lambda}{2}t^2 + D_1 t + F,$$

wobei $C_1, D_1, F, \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig sind.

b) Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = X(x)T(t)$ ergibt $X''T - X'T + X\ddot{T} = 0$ oder äquivalent

$$\frac{X'' - X'}{X} = -\frac{\ddot{T}}{T}.$$

Die linke Seite dieser Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Deshalb sind beide Seiten gleich einer Konstanten λ:

$$\frac{X'' - X'}{X} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad X'' - X' - \lambda X = 0. \qquad (1)$$

$$-\frac{\ddot{T}}{T} = \lambda \qquad \text{bzw.} \qquad \ddot{T} + \lambda T = 0. \qquad (2)$$

Die Gleichung (1) ist linear mit konstanten Koeffizienten. Sie besitzt das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 - \alpha - \lambda$ mit den Nullstellen

$$\alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\lambda}}{2}.$$

Wir unterscheiden die drei Fälle

- $\lambda < -\frac{1}{4}$: $\quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}$,
  dann ist die reelle Lösung gegeben durch

$$a(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}x \right) + C_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}x \right) \right).$$

- $\lambda = -\frac{1}{4}$: $\quad \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, dann ist $\frac{1}{2}$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms und somit bilden $e^{\frac{1}{2}x}$, $xe^{\frac{1}{2}x}$ eine Basis der Lösungen. Wir finden demnach

$$a(x) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

  <u>Bemerkung:</u> Für die Bestimmung der zwei linear unabhängigen Lösungen der Gleichung kann man auch folgende Überlegung machen. Eine Lösung ist klar, nämlich $a(x) = C\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Um auf die andere Lösung ($a(x) = Cx\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$) zu kommen, betrachten wir die Folgende Perturbation. Wir nehmen an, die Lösung wäre gegeben durch die beiden linear unabhängigen Funktionen $\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x}$ und $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$. Dann wäre aber, falls $\epsilon \neq 0$, auch die folgende Linearkombination $\frac{1}{\epsilon}\left[\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\varepsilon)x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\right]$ eine Lösung. Wir berechnen

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}}{\epsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{e}^{yx}\bigg|_{y=\frac{1}{2}} = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

  Die Funktion $Cx\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$ ist also sicherlich ein Kandidat für die zweite linear unabhänige Lösung und man rechnet nach, dass sie tatächlich die Differentialgleichung löst.

- $\lambda > -\frac{1}{4}$: $\quad \alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda} \in \mathbb{R}$,

$$a(x) = C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x}.$$

Die Gleichung (2) ist ebenfalls linear mit konstanten Koeffizienten. Sie besitzt das charakteristische Polynom $p(\alpha) = \alpha^2 + \lambda$ mit den Nullstellen

$$\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda} \text{ für } \lambda > 0 \text{ und } \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \text{ für } \lambda \leq 0.$$

Wir unterscheiden die drei Fälle

- $\lambda < 0: \quad \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{|\lambda|} = \pm\sqrt{-\lambda}$

$$b(t) = D_1 \mathrm{e}^{t\sqrt{|\lambda|}} + D_2 \mathrm{e}^{-t\sqrt{|\lambda|}}.$$

- $\lambda = 0: \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$

$$b(t) = (D_1 t + D_2)\mathrm{e}^0 = D_1 t + D_2.$$

- $\lambda > 0: \quad \alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda},$

$$b(t) = D_1 \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right) + D_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right).$$

Die Lösungen der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ für die gegebene Differentialgleichung lauten somit:

- $\lambda < -\frac{1}{4}$:

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos\left(\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}} x \right) + C_2 \sin\left(\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}} x \right) \right) \left(D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} \right).$$

- $\lambda = -\frac{1}{4}$

$$u(x,t) = \left((C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} \right) \left(D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} \right).$$

- $-\frac{1}{4} < \lambda < 0$:

$$u(x,t) = \left(C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)x} \right) \left(D_1 \mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t} \right).$$

- $\lambda = 0$:

$$u(x,t) = (C_1 \mathrm{e}^x + C_2)(D_1 t + D_2).$$

- $\lambda > 0$:

$$u(x,t) = \left(C_1 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)x} + C_2 \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}\right)x} \right) \left(D_1 \sin\left(t\sqrt{\lambda}\right) + D_2 \cos\left(t\sqrt{\lambda}\right) \right).$$

Bemerkung: Offenbar erhält man mit dem Summenansatz eine viel kleinere Familie von Lösungen als mit dem Produktansatz. Die Gesamtheit aller Lösungen der gegebenen Gleichung ist viel umfangreicher als die Menge der hier berechneten Lösungen und ergibt sich als Überlagerung der oben berechneten Lösungen für verschiedene λ.

4. Wir machen einen Separationsansatz, also $u(x,t) = X(x)T(t)$. Dann ist $u_x(x,t) = X'(x)T(t)$ und $u_t(x,t) = X(x)\dot{T}(t)$ Einsetzten in die Gleichung liefert $xX'T + X\dot{T} = tXT$ respektive

$$\frac{xX'}{X} = t - \frac{\dot{T}}{T}.$$

Die linke Seite der Gleichung hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t. Damit obige Gleichung also für alle Paare (x,t) erfüllt ist, müssen die beiden Seiten konstant sein. Man erhält daher

$$\frac{xX'}{X} = t - \frac{\dot{T}}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Nun löst man beide Gleichungen separat. Die erste Gleichung ist ausserhalb von Null äquivalent zu $\frac{X'}{X} = \frac{\lambda}{x}$. Integration nach x liefert $\ln X(x) = \lambda \ln|x| + C$ und daraus folgt $X(x) = \widetilde{C}\,|x|^\lambda$. Die Gleichung in t lösen wir analog, indem wir nach t integrieren:

$$\begin{aligned} t - \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} &= \lambda \\ \int \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}\mathrm{d}t &= \int (t-\lambda)\mathrm{d}t \\ \ln T(t) &= \frac{t^2}{2} - \lambda t + D \\ T(t) &= \widetilde{D}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}-\lambda t}. \end{aligned}$$

Man erhält daher

$$u(x,t) = X(x)T(t) = \widetilde{C}\,|x|^\lambda\,\widetilde{D}\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}-\lambda t} = E\,|x|^\lambda\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}-\lambda t}$$

Da $u(x,0) = x^2$ folgt sofort, dass $E = 1$ und $\lambda = 2$ sein muss, daher erhält man

$$u(x,t) = x^2 \exp\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right).$$

Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert, erfüllt die gegebene Differentialgleichung und die geforderten Anfangsdaten.

5. Wir verwenden den Separationsansatz $u(x,t) := X(x)T(t)$. Es folgt

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} = k \in \mathbb{R}$$

und die Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ implizieren $X'(0) = X'(1) = 0$. Die gewöhnliche Differentialgleichung $X'' - kX = 0$ hat folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} k = 0: \quad & X(x) = C_1 + C_2 x \\ & X'(x) = C_2 \\ k < 0: \quad & X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{-k}x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{-k}x\right) \\ & X'(x) = \sqrt{-k}\left(C_2 \cos\left(\sqrt{-k}x\right) - C_1 \sin\left(\sqrt{-k}x\right)\right) \\ k > 0: \quad & X(x) = C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{k}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{k}x} \\ & X'(x) = \sqrt{k}\left(C_1 \mathrm{e}^{\sqrt{k}x} - C_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{k}x}\right). \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen finden wir im Fall $k = 0$ nur die konstante Lösung $X = C_1$ und für $k > 0$ folgt einerseits $C_1 = C_2$ und andererseits $C_1 e^{\sqrt{k}} = C_2 e^{-\sqrt{k}}$, was nur die triviale Lösung $X \equiv 0$ zulässt. Im Fall $k < 0$ folgt $C_2 = 0$ aus $X'(0) = 0$ und $X'(1) = 0$ impliziert $C_1 \sin\left(\sqrt{-k}\right) = 0$. Nichttriviale Lösungen finden wir also nur, falls $k =$

$-n^2\pi^2$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die zugehörige ODE für T lautet dann $\ddot{T} = -n^2\pi^2 T$, deren allgemeine Lösung die Gestalt $T(t) = A\cos(n\pi t) + B\sin(n\pi t)$ hat. Dies führt zur allgemeinen Lösung

$$u(x,t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\pi n t) + B_n \sin(\pi n t)) \cos(\pi n x).$$

Unter Verwendung des Hinweises finden wir

$$u(x,0) = 2\sin^2(2\pi x) = 1 - \cos(4\pi x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\pi n x)$$

und dies führt zu $A_0 = 1, A_4 = -1$ und $A_n = 0$ für alle übrigen n. Die Bedingung $u_t(x,0) = 0$ impliziert

$$B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n\pi B_n \cos(\pi n x) = 0 \Longleftrightarrow B_n = 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wir finden als Lösung

$$u(x,t) = 1 - \cos(4\pi t)\cos(4\pi x)\,.$$

Bemerkung: Eine Lösung unter Verwendung der Basislösungen für die Wellengleichung aus der Vorlesung

$$X(x) = A\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$T(t) = C\cos(\lambda_n t) + D\sin(\lambda_n t)\,,$$

wobei hier $L = 1$, und $\lambda_n = \frac{n\pi c}{L} = n\pi$, da $c = 1$, wäre auch okay gewesen. Man betrachtet dann die Randbedingung $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 1$. Es ist

$$X'(x) = -An\pi\sin(n\pi x) + Bn\pi\cos(n\pi x)$$

und somit muss

$$X'(0) = Bn\pi = X'(1) = Bn\pi(-1)^n \stackrel{!}{=} 0,$$

also $B = 0$. Demnach ist die Lösung von der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi x)\left(A_n\cos(n\pi t) + B_n\sin(n\pi t)\right).$$

Einsetzen der Anfangsbedingung liefert

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\pi x) \stackrel{!}{=} 2\sin^2(2\pi x) = 1 - \cos(4\pi x)$$

wobei wir den Hinweis verwendet haben. Dies führt wie in der Lösung oben zu $A_0 = 1$, $A_4 = -1$ und $A_n = 0$ für $n \neq 0, 4$. Schließlich ist die Lösung

$$u(x,t) = 1 - \cos(4\pi t)\cos(4\pi x).$$

6. Wir wählen den Separationsansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Setzen wir diesen in die partielle Differentialgleichung $u_{tt} + 2\pi c u_t = c^2 u_{xx}$ ein, so erhalten wir

$$XT_{tt} + 2\pi c X T_t = c^2 X_{xx} T.$$

Bei Division durch c^2XT ist das äquivalent zu

$$\frac{T_{tt}}{c^2T} + 2\pi \frac{T_t}{cT} = \frac{X_{xx}}{X}.$$

Dies muss gleich einer Konstanten k sein, da eine Änderung in x oder t jeweils nur eine Seite der Gleichung betreffen würde und die andere Seite unverändert ließe. Somit darf eine Änderung in x oder t keine der beiden Seiten ändern.

Es bleiben die folgenden beiden Gleichungen zu lösen:

$$\frac{X_{xx}}{X} = k \tag{1}$$

$$\frac{T_{tt}}{c^2T} + 2\pi \frac{T_t}{cT} = k \tag{2}$$

Als erstes bemerken wir, dass die Bedingung $u(0,t) = u(1,t) = 0$ periodisches Verhalten in x bedeutet[1]. Die Gleichung (1), $\quad X_{xx} - kX = 0 \quad$ hat dann eine periodische Lösung, wenn $k = -\rho^2 \leq 0$ (siehe Bemerkung am Ende der Aufgabe). Allerdings ergeben sich für $k = 0$ nur konstante periodische Lösungen und die Randbedingung schließt alle Konstanten ungleich Null aus.

$k = -\rho^2 < 0$:

Gleichung (1) wird zu $X_{xx} = -\rho^2 X$ mit der bekannten allgemeinen Lösung

$$X(x) = A\cos(\rho x) + B\sin(\rho x).$$

Die Randbedingung $X(0) = 0$ liefert $A = 0$, die andere Randbedingung $X(1) = 0$ impliziert $B\sin(\rho) = 0$. Der Fall $B = 0$ ist uninteressant, da dann wieder $X \equiv 0$ gilt, der interessante Fall ist also

$$\sin(\rho) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

mit den Fundamentallösungen

$$X_n(x) = \sin(n\pi x),\ n \in \mathbb{N}.$$

Beachte, dass $X_n(x)$ ungerade ist und wir für negative n deswegen keine weiteren Fundamentallösungen erhalten (nur das Vorzeichen ist anders). Der Fall $n = 0$ ist nichts anderes als $X_0 \equiv 0$ und kann deswegen auch weggelassen werden.

[1] Dass nichttriviale Lösungen der DGL periodisch in x sein müssen kann, man wie folgt herleiten. Aus $u(0,t) = 0$ wird mit dem Separationsansatz $X(0)T(t) = 0$, also entweder $X(0) = 0$ oder $T(t) = 0$, $\forall t$. Der Fall $T(t) = 0$, $\forall t$ ist uninteressant, denn daraus folgt $u(x,t) = X(x)T(t) \equiv 0$. Also können wir uns im Folgenden auf die Randbedingung $X(0) = 0$ beschränken. Aus $u(1,t) = 0$ wird mit dem Separationsansatz $X(1)T(t) = 0$, also entweder $X(1) = 0$ oder $T(t) = 0$, $\forall t$. Der Fall $T(t) = 0$, $\forall t$ ist uninteressant, denn daraus folgt $u(x,t) = X(x)T(t) \equiv 0$. Also können wir uns auf die Randbedingung $X(1) = 0$ beschränken.

Gleichung (2):
Wir wissen bereits, dass $k = -\rho^2 = -n^2\pi^2$ gilt, zu lösen ist also

$$T_{tt} + 2\pi c T_t + c^2 n^2 \pi^2 T = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung lautet

$$\lambda^2 + 2\pi c\lambda + c^2 n^2 \pi^2 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda = \frac{-2\pi c \pm \sqrt{4\pi^2 c^2 - 4c^2 n^2 \pi^2}}{2} = c\pi(-1 \pm \sqrt{1-n^2}).$$

Wegen $1 - n^2 < 0$ im Fall $n \geq 2$, sind die Lösungen für $n \geq 2$ also gegeben durch

$$T_n(t) = (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t))e^{-c\pi t},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,$$

wobei $\lambda_n = c\pi\sqrt{n^2-1}$. Für $n = 1$ ist $\lambda = -c\pi$ doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms und damit ergibt sich für T:

$$T_1(t) = (A_1 + B_1 t)e^{-c\pi t}.$$

Es gilt also

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t))e^{-c\pi t}\sin(n\pi x),\ n \geq 2$$

und

$$u_1(x,t) = X_1(x)T_1(t) = (A_1 + B_1 t)e^{-c\pi t}\sin(\pi x).$$

Der Ansatz für die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung lautet

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) &= (A_1 + B_1 t)e^{-c\pi t}\sin(\pi x) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}(A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t))e^{-c\pi t}\sin(n\pi x). \end{aligned}$$

a) Wir setzen nun die noch verbleibenden Anfangsbedingungen ein:
Aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = \sin(3\pi x)$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\pi x = \sin(3\pi x),$$

ein Koeffizientenvergleich liefert $A_3 = 1$ und $A_n = 0$ für $n \neq 3$. Beachte, dass A_n die Fourierkoeffizienten der ungeraden Fortsetzung von $\sin 3\pi x$ sind und die Fourierreihe von $\sin(3\pi x)$ genau durch diesen einen Term gegeben ist.

Für die Anfangsbedingung $u_t(x,0) = 0$ rechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \left[B_1 e^{-c\pi t} + (A_1 + B_1 t)(-c\pi)e^{-c\pi t}\right]\sin(\pi x) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(-A_n\lambda_n \sin(\lambda_n t) + B_n\lambda_n \cos\lambda_n t)e^{-c\pi t}\right. \\ &\quad \left. + (A_n \cos(\lambda_n t) + B_n \sin(\lambda_n t))(-c\pi)e^{-c\pi t}\right]\sin(n\pi x), \end{aligned}$$

damit folgt

$$u_t(x,0) = (B_1 - A_1 c\pi)\sin(\pi x) + \sum_{n=2}^{\infty}(B_n\lambda_n - A_n c\pi)\sin(n\pi x) = 0.$$

Daraus folgt für alle $n \geq 2$ die Gleichung

$$B_n\lambda_n - A_n c\pi = 0.$$

Für $n = 3$ gilt $A_3 = 1$ und $\lambda_3 = \sqrt{8}c\pi$, damit muss

$$B_3\lambda_3 - A_3 c\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B_3 = \frac{A_3 c\pi}{\lambda_3} = \frac{1}{\sqrt{8}}$$

gelten.
Für alle anderen $n \geq 2$ gilt $A_n = 0$ und $\lambda_n > 0$, was $B_n = 0$ ergibt.
Für $n = 1$ muss

$$B_1 - A_1 c\pi = 0$$

gelten, aus $A_1 = 0$ folgt also auch $B_1 = 0$.
Damit erhalten wir die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (A_3\cos\lambda_3 t + B_3\sin\lambda_3 t)e^{-c\pi t}\sin 3\pi x \\ &= \left(\cos\sqrt{8}c\pi t + \frac{1}{\sqrt{8}}\sin\sqrt{8}c\pi t\right)e^{-c\pi t}\sin 3\pi x. \end{aligned}$$

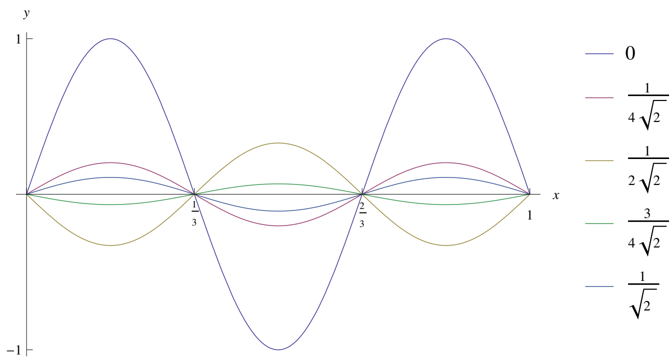

Abbildung 1: $u(x,t)$ für $t = 0, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

In Abbildung 1 ist $u(x,t)$ für verschiedene Werte von t dargestellt für $c = 1$. Für $t = 0$ ist dies $u(x,0)$, also die in der Aufgabenstellung gegebene Anfangsauslenkung $\sin 3\pi x$. Mit steigendem t schwingt die Saite nach unten und erreicht für $t = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ auf der anderen Seite der $x-$Achse die maximale Amplitude. Für $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist das nächste Maximum in der Amplitude erreicht und die Schwingung hat ihre ganze Periode durchlaufen. Beachte, dass die maximale Amplitude immer kleiner wird wegen der Exponentialfunktion. Es wird also tatsächlich eine gedämpfte Schwingung modelliert, insbesondere gilt $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ oder anders ausgedrückt: Die Schwingung wird immer schwächer und hört schliesslich auf.

b) Wie nehmen die Fourierreihe von f aus Serie 10

$$\frac{8k}{\pi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{(2\ell+1)^2}\cdot\sin\frac{(2\ell+1)\pi x}{L}\ .$$

Dann ist für $L=1$ und $k=\frac{L}{2}$

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}}{(2l+1)^2}\sin\left((2l+1)\pi x\right).$$

Aus der Anfangsbedingung $u(x,0)=f(x)$ folgern wir mit Koeffizientenvergleich der Fourierreihe von f

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\pi x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^{l}}{(2l+1)^2}\sin\left((2l+1)\pi x\right),$$

dass für $n=2l+1$ die Koeffizienten $A_{2l+1}=\frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^2}$ sind und für alle $n\neq 2l+1$ ist $A_n=0$.

Wie in Teilaufgabe **a)** folgt aus der Anfangsbedingung $u_t(x,0)=0$ die folgende Gleichung für die Koeffizienten B_n:

$n\geq 2$ die Gleichung

$$B_n\lambda_n-A_nc\pi=0.$$

Dann ist $B_n=\frac{A_nc\pi}{\lambda_n}$. Also ist für alle $n=2l+1$, $B_{2l+1}=\frac{4c}{\lambda_{2l+1}\pi}\frac{(-1)^l}{(2l+1)^2}$.

Für alle anderen $n\geq 2$ gilt $A_n=0$ und $\lambda_n>0$, was $B_n=0$ ergibt.

Für $n=1$ muss

$$B_1-A_1c\pi=0$$

gelten, aus $A_1=\frac{4}{\pi^2}$ folgt $B_1=\frac{4c}{\pi}$.

Damit erhalten wir die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned}u(x,t)=&\left(\frac{4}{\pi^2}+\frac{4c}{\pi}t\right)e^{-c\pi t}\sin(\pi x)+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^l}{(2l+1)^2}\right)\left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(2c\pi\sqrt{l(l+1)}t\right)\right.\\&\left.+\frac{2}{\pi^2\sqrt{l(l+1)}}\sin\left(2c\pi\sqrt{l(l+1)}t\right)\right]e^{-c\pi t}\sin\left((2l+1)\pi x\right).\end{aligned}$$

Bemerkung: Hier ist noch einmal die ausführliche Überlegung, warum $k=-\rho^2<0$ gelten muss.

$\underline{k=0:}$

Gleichung (1) wird zu $X_{xx}=0$, diese Differentialgleichung können wir direkt zwei Mal nach x integrieren und erhalten als allgemeine Lösung $X(x)=ax+b$. Setzen wir nun die Randbedingung $X(0)=0$ ein, so folgt $b=0$, mit der anderen Randbedingung $X(1)=0$ folgt $a=0$. Für $k=0$ gilt also $X\equiv 0$ und damit $u(x,t)=X(x)T(t)\equiv 0$, somit ist dieser Fall uninteressant.

$k = \mu^2 > 0$:
Gleichung (1) wird zu $X_{xx} = \mu^2 X$, diese Differentialgleichung hat bekanntlich die allgemeine Lösung $X(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Setzen wir nun die Randbedingung $X(0) = 0$ ein, so folgt $B = -A$, mit der anderen Randbedingung $X(1) = 0$ folgt

$$0 = X(1) = Ae^{\mu} - Ae^{-\mu} \quad \Leftrightarrow \quad A = Ae^{2\mu}.$$

Dies ist erfüllt für $A = 0$ oder $\mu = 0$, wobei $\mu = 0$ ein Widerspruch zur Annahme $k > 0$ ist. Der Fall $A = 0$ führt zu $X \equiv 0$ und damit $u(x,t) = X(x)T(t) \equiv 0$, somit ist dieser Fall uninteressant.

$k = -\rho^2 < 0$:
Dies ist also der einzige interessante Fall, welcher übrigbleibt. Gleichung (1) wird zu $X_{xx} = -\rho^2 X$ mit der bekannten allgemeinen Lösung

$$X(x) = A\cos(\rho x) + B\sin(\rho x).$$