Serie 1: Wiederholung von Vektoren und Koordinatengleichungen

Bemerkungen:

- Die Aufgaben der Serie 1 bilden den Fokus der Übungsgruppen vom 23./25. Februar. Der entsprechende Stoff befindet sich in den Abschnitten 12.1–12.5 (Seiten 95–144) des Buches *Analysis 2* von Thomas, Weir und Hass und wurde größtenteils in der Vorlesung Mathematik I behandelt.
- Mehr **Informationen** zur Vorlesung und den Übungen finden Sie unter

  https://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2016/other/mathematik2_umnw

- Die **Übungsgruppen** finden jeweils
  - dienstags von 8-10 Uhr
  - donnerstags von 9-11 Uhr
  - donnerstags von 13-15 Uhr
  - donnerstags von 15-17 Uhr

  statt. Bitte tragen Sie sich so bald wie möglich in eine der Übungsgruppen ein.
- Die **Präsenz** findet ab der zweiten Semesterwoche (d.h. ab Dienstag 1.3.2016) jeweils
  - dienstags von 17-19,
  - mittwochs von 17-19 und
  - freitags von 12-14

  im Raum HG E 41 statt.

---

1. Stellen Sie Gleichungen und/oder Ungleichungen auf, die die folgenden Punktmengen im Raum beschreiben.

a) Der Halbraum, der aus den Punkten auf und unterhalb der xy-Ebene besteht.

b) Der Würfel (inklusive seines Inneren) im ersten Oktanten, der von den Koordinatenebenen und den Ebenen $x = 3$, $y = 3$ und $z = 3$ begrenzt wird.

c) Die zur z-Achse parallele Gerade, die durch den Punkt $(2, -5, 3)$ verläuft.

d) Der Kreis mit Radius 5 und Mittelpunkt $(3, 2, 1)$ in der Ebene $x = 3$.

e) Die obere Hälfte der Kugeloberfläche (inklusive ihres Äquators) mit Radius 3 und Mittelpunkt $(2, 1, 0)$.

2. Beschreiben Sie geometrisch die Punktmengen im Raum, die den folgenden Gleichungen und/oder Ungleichungen genügen.

a) $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

b) $x = -1$ und $z = 2$.

c) $x^2 + y^2 \leq 4$ und $z = 3$.

d) $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 16$.

e) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6z - 12 = 0$.

3. Wir betrachten die Raumpunkte

$$P_1 = (0,0,1) \text{ und } P_2 = (1,2,3).$$

Bestimmen Sie:

a) die Länge des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$;

b) den Einheitsvektor $\overrightarrow{u}$, der in die Richtung von $\overrightarrow{P_1P_2}$ zeigt;

c) den Mittelpunkt der Strecke zwischen P_1 und P_2;

d) die Länge des Vektors

$$3\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{Q_1Q_2},$$

wobei $Q_1 = (5,5,5)$ und $Q_2 = (4,8,9)$ seien.

Sei nun $\overrightarrow{P_1P_2}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens.

e) Drücken Sie $\overrightarrow{P_1P_2}$ als Produkt des Betrags der Geschwindigkeit mit einem Einheitsvektor aus, der in die Richtung der Bewegung zeigt.

f) Drücken Sie $\overrightarrow{P_1P_2}$ in der Form

$$\overrightarrow{P_1P_2} = v_1 \overrightarrow{i} + v_2 \overrightarrow{j} + v_3 \overrightarrow{k}$$

aus, wobei $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ und $\overrightarrow{k}$ die *Standardbasisvektoren* (oder *kanonischen Einheitsvektoren*) seien.

4. Sind die folgenden Vektoren orthogonal? Bestimmen Sie zudem – wann immer möglich – einen Vektor $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$, der gleichzeitig senkrecht zu $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ ist.

a) $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

5. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Form

$$x = x_0 + tv_1,\ y = y_0 + tv_2,\ z = z_0 + tv_3,\ t \in I,$$

für jede der folgenden geradlinigen Mengen:

a) die zum Vektor $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ parallele Gerade durch den Punkt $P_0 = (3, 4, 5)$;

b) die Gerade durch die beiden Punkte $P = (-3, 2, 1)$ und $Q = (-4, 0, 2)$;

c) die Strecke zwischen den oben genannten Punkten P und Q.

6. Wir betrachten die Ebenen

$$E_1 :\ x - y + 2z = 3 \quad \text{und} \quad E_2 :\ x + 2y + 3z = 0.$$

a) Bestimmen Sie einen von Null verschiedenen Vektor, der senkrecht zur Ebene E_1 ist.

b) Stellen Sie eine Gleichung für die Ebene durch den Punkt $P = (-1, 1, 1)$ auf, die parallel zur Ebene E_2 verläuft.

c) Bestimmen Sie den Punkt (x, y, z), in dem die Gerade mit der Parametrisierung

$$x = t + 1,\ y = 3t,\ z = -t - 3,\ t \in \mathbb{R},$$

die Ebene E_1 schneidet.

d) Bestimmen Sie einen Vektor $\neq \overrightarrow{0}$, der parallel zur Schnittgeraden der beiden Ebenen E_1 und E_2 ist.
Hinweis: Die Schnittgerade zweier nicht paralleler Ebenen steht senkrecht auf den beiden Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ der Ebenen und ist somit parallel zu $\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

e) Stellen Sie eine Parametrisierung für die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2 auf.
Hinweis: Teilaufgabe d).

Kurzlösungen:

1. **a)** $x, y \in \mathbb{R}$, $z \leq 0$

b) $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$, $0 \leq z \leq 3$

c) $x = 2$, $y = -5$, $z \in \mathbb{R}$

d) $x = 3$, $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$

e) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$

2. **a)** 1. Oktant

b) Gerade parallel zur y-Achse, die durch den Punkt $(-1, 0, 2)$ verläuft

c) abgeschlossene Kreisscheibe in der $z = 3$-Ebene mit Mittelpunkt $(0, 0, 3)$ und Radius 2

d) Oberfläche der Kugel mit Radius 4 und Mittelpunkt $(1, -2, 0)$

e) Oberfläche der Kugel mit Radius 5 und Mittelpunkt $(2, 0, -3)$

3. **a)** 3

b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\sqrt{29}$

e) $\overrightarrow{P_1P_2} = 3\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

f) $\overrightarrow{P_1P_2} = 1\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 2\,\vec{k}$

4. **a)** $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal, aber es gibt keinen von Null verschiedenen Vektor, der auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleichzeitig senkrecht ist.

b) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind orthogonal und die Menge der Vektoren, die auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleichzeitig senkrecht stehen, ist gegeben durch

$$\left\{ t\,\vec{u} \times \vec{v} = t\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind nicht orthogonal. Die Menge der auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleichzeitig senkrechten Vektoren ist gegeben durch

$$\left\{ s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. **a)** z.B. $x = 3$, $y = 4 - t$, $z = 5 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$

b) z.B. $x = -3 - t,\ y = 2 - 2t,\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R}$

c) z.B. $x = -3 - t$, $y = 2 - 2t$, $z = 1 + t$, $t \in [0, 1]$

6. **a)** z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) z.B. $x + 2y + 3z = 4$

c) $(-1, -6, -1)$

d) z.B. $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) z.B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$