Serie 2: Kurven in der Ebene

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 2 sind der Fokus der Übungsstunden vom 1./3. März.

1. In den Aufgaben (a)-(d) ist jeweils die Parameterdarstellung für die Bewegung eines Teilchens in der xy-Ebene gegeben. Bestimmen Sie die Bahn des Teilchens und stellen Sie eine Gleichung in kartesischen Koordinaten für sie auf. Zeichnen Sie den Graphen zu dieser Gleichung (die Graphen können von der ausgewählten Gleichung abhängen). Welcher Teil des Graphen wird von dem Teilchen durchlaufen? Zeichnen Sie ein, in welche Richtung sich das Teilchen bewegt.

a) $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty.$

b) $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty.$

c) $x = \cos(2t), \quad y = \sin(2t), \quad 0 \leq t \leq \pi.$

d) $x = \cosh t, \quad y = \sinh t, \quad -\infty < t < \infty.$

Hinweis zu (d): Hyperbolischer Satz des Pythagoras (vgl. Aufgabe 7e der Serie 1 aus Mathematik I HS 2015)

2. Ein Teilchen startet in dem Punkt $(a, 0)$ und bewegt sich auf der Ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Bestimmen Sie Parametergleichungen und ein Parameterintervall, wenn das Teilchen die Ellipse

a) einmal im Uhrzeigersinn,

b) einmal gegen den Uhrzeigersinn,

c) zweimal im Uhrzeigersinn,

d) zweimal gegen den Uhrzeigersinn

durchläuft. (Es gibt viele richtige Lösungen).

3. Bestimmen Sie in den Aufgaben (a)-(c) jeweils eine Parameterdarstellung der entsprechenden Kurve.

a) Der Strahl (die Halbgerade) mit dem Startpunkt $(-1, 2)$, der durch den Punkt $(0, 0)$ geht.

b) Die untere Hälfte der Parabel $x - 1 = y^2$.

c) Der linke Scheitel der Hyperbel $x^2 - 4y^2 = 4$.

4. Bestimmen Sie in den Aufgaben (a)-(c) eine Gleichung für die Tangente an die Kurve in dem Punkt, der dem gegebenen Parameterwert von t entspricht. Berechnen Sie ausserdem den Wert von $\frac{d^2y}{dx^2}$ in diesem Punkt.

a) $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = \dfrac{1}{4}.$

b) $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1.$

c) $x = t + e^t, \quad y = 1 - e^t, \quad t = 0.$

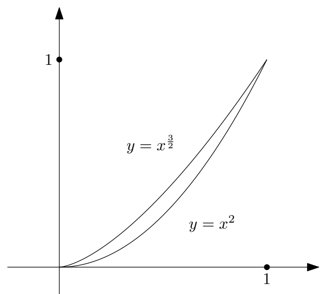
5. Bestimmen Sie in den Aufgaben (a)-(d) die Länge der gegebenen Kurve. Verwenden Sie Integrationsmethoden aus der Vorlesung Mathematik I.

a) Die Neilsche Parabel

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

b) Die Parabel

$$y = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

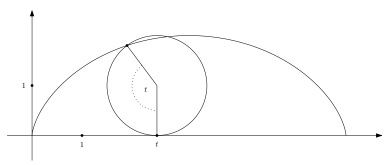


Hinweis: Mithilfe der Integralsubstitution $2x = \sinh(u)$ ergibt sich:

$$\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\ dx = \int_0^{\operatorname{arsinh}(2)} \frac{1}{2}\cosh^2(u)\ du = \frac{1}{4}\Big[u + \sinh(u)\cosh(u)\Big]_0^{\operatorname{arsinh}(2)}.$$

c) Die Zykloide:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



Hinweis: Es gilt

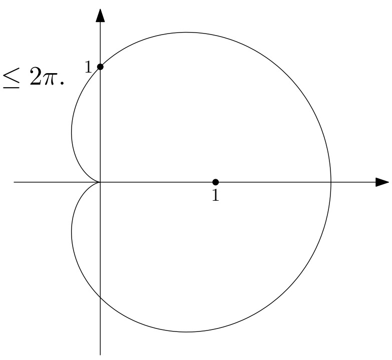
$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\ dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos(t)}\ dt.$$

(Warum?) Verwenden Sie anschließend die Substitution

$$u = \cos(t), \ \frac{dt}{du} = \frac{d}{du}\arccos(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

d) Die Kardioide:

$$x = (1+\cos t)\cos t, \quad y = (1+\cos t)\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$



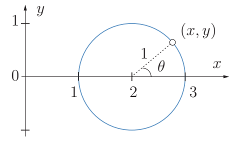
Hinweis: Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos(t)}\ dt = 2\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos(t)}\ dt.$$

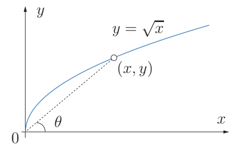
(Warum?) Gehen Sie danach analog zu Teilaufgabe (c) vor.

6. Bestimmen Sie in den Aufgaben (a)-(c) eine Parameterdarstellung der Kurve, indem Sie als Parameter den Winkel ϑ, den Sie den folgenden Abbildungen entnehmen können.

a) Die Kurve auf dem Kreis $(x-2)^2+y^2=1$, die bei $(1,0)$ startet und sich einmal im Uhrzeigersinn um die Kreislinie bewegt.

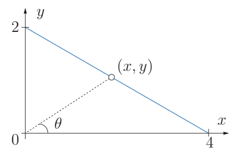


b) Die Kurve $y=\sqrt{x}$ mit dem Endpunkt $(0,0)$.



Hinweis: $\frac{y}{x}=\tan(\theta)$.

c) Die Strecke zwischen den Punkten $(0,2)$ und $(4,0)$.



Hinweis: Bestimmen Sie eine kartesische Gleichung der Strecke $(ax+by=c)$ und verwenden Sie dann $y=x\tan(\theta)$.

Kurzlösungen:

1. **a)** $y = x^2$ und es wird die ganze Kurve (von $-\infty$ bis $+\infty$) durchlaufen.

b) $y = 2x + 3$ und es wird die ganze Kurve (von $-\infty$ bis ∞) durchlaufen

c) $x^2 + y^2 = 1$ und es wird der ganze Kreis gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen (mit Start bei $(1, 0)$)

d) $x^2 - y^2 = 1$ und es wird der rechte Scheitel durchlaufen (von unten rechts nach oben rechts)

2. **a)** $x = a\cos t, \quad y = -b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

b) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

c) $x = a\cos t, \quad y = -b\sin t, \quad 0 \le t \le 4\pi.$

d) $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \le t \le 4\pi.$

3. **a)** Mögliche Antwort: $x = -1 + t$, $y = 2 - 2t$, $t \ge 0$

b) Mögliche Antwort: $x = t^2 + 1$, $y = t$, $t \le 0$

c) Mögliche Antwort: $x = -\sqrt{4 + 4t^2}$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$

4. **a)** $y = x + \frac{1}{4}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2.$

b) $y = x - 4, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}.$

c) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{8}.$

5. **a)** $\frac{13^{\frac{3}{2}} - 8}{27} \approx 1.44.$

b) $\frac{1}{4}\left(\operatorname{arsinh}(2) + 2\sqrt{5}\right) \approx 1.48.$

c) $\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)}\, dt = 8.$

d) $\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos(t)}\, dt = 8.$

6. **a)** $x(\theta) = 2 - \cos(\theta)$, $y(\theta) = \sin(\theta)$ $0 \le \theta \le 2\pi$

b) $x(\theta) = \frac{1}{\tan^2(\theta)}$, $y(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

c) $x(\theta) = \frac{4}{1+2\tan(\theta)}$, $y(\theta) = \frac{4\tan(\theta)}{1+2\tan(\theta)}$ für $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ und $x(\frac{\pi}{2}) = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 2$