Serie 3: Bogenlänge und Geometrie im Raum

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 3 sind der Fokus der Übungsstunden vom 8./10. März.

1. Skizzieren Sie die Menge der Punkte, deren Polarkoordinaten die Gleichungen und Ungleichungen der Aufgaben (a)-(e) erfüllen. Bestimmen Sie jeweils die Gleichungen (bzw. Ungleichungen) in kartesischen Koordinaten, die äquivalent zu den gegebenen Gleichungen (bzw. Ungleichungen) in Polarkoordinaten sind.

a) $3 \leq r \leq 4$.

b) $r = \dfrac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}$.

c) $r^2 + 2r^2 \cos\theta \sin\theta = 1$.

d) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi, \ 1 \leq r \leq 2$.

e) $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \ 0 \leq r \leq \sqrt{8}$.

2. Berechnen Sie in den Aufgaben (a)-(c) die Länge der angegebenen Kurven.

a) Die Spirale $\quad r = \dfrac{e^\theta}{\sqrt{2}}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$

b) Die Kurve $\quad r = \cos^3\left(\dfrac{\theta}{3}\right), \quad 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}.$

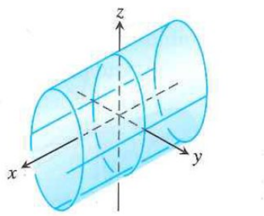
Hinweis: Anwendung des Satzes von Pythagoras führt auf das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \, d\theta$$

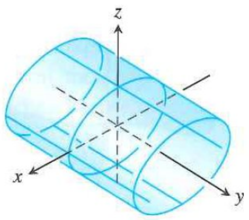
3. Ordnen Sie in den Aufgaben 1-12 die Gleichungen den Oberflächen zu, die durch sie definiert werden. Benennen Sie dann jede Fläche (Paraboloid, Ellipsoid etc.). Die Flächen sind mit den Buchstaben *a.* bis *l.* bezeichnet.

1. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$.
2. $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$.
3. $9y^2 + z^2 = 16$.
4. $y^2 + z^2 = x^2$.
5. $x = y^2 - z^2$.
6. $x = -y^2 - z^2$.
7. $x^2 + 2z^2 = 8$.
8. $z^2 + x^2 - y^2 = 1$.
9. $x = z^2 - y^2$.
10. $z = -4x^2 - y^2$.
11. $x^2 + 4z^2 = y^2$.
12. $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$.

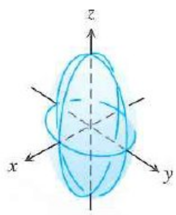
a.



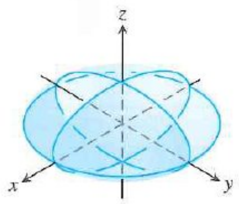
b.



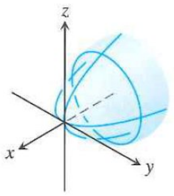
c.



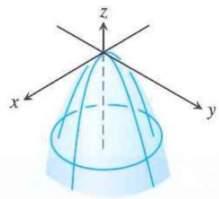
d.



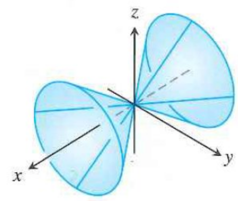
e.



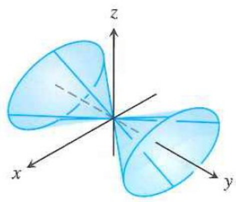
f.



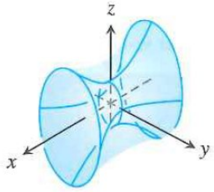
g.



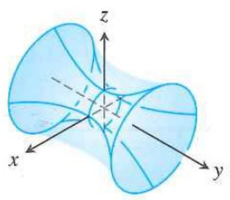
h.



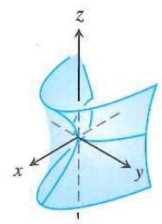
i.



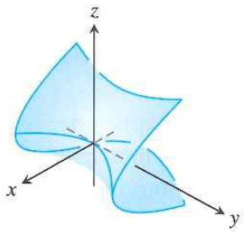
j.



k.



l.



4. In den Aufgaben (a)-(c) gibt $\vec{r}(t)$ den Ort eines Teilchens im Raum zur Zeit t an. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Tangente an die Kurve bei dem angegebenem Parameterwert $t = t_0$.

Zur Erinnerung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$, wobei

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) $\vec{r}(t) = (t+1)\vec{i} + (t^2-1)\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

b) $\vec{r}(t) = (\sec t)\vec{i} + (\tan t)\vec{j} + \dfrac{4}{3}t\vec{k}, \quad t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$
Hinweis: $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ bezeichnet den Sekans.

c) $\vec{r}(t) = (2\ln(t+1))\vec{i} + t^2\vec{j} + \dfrac{t^2}{2}\vec{k}, \quad t_0 = 1.$

5. Berechnen Sie die Integrale in den Aufgaben (a)-(c).

a) $\displaystyle\int_0^1 \left[te^{t^2}\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \vec{k}\right] dt.$

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(\sin t)\vec{i} + (1+\cos t)\vec{j} + (\sec^2 t)\vec{k}\right] dt.$

c) $\displaystyle\int_1^4 \left[\frac{1}{t}\vec{i} + \frac{1}{5-t}\vec{j} + \frac{1}{2t}\vec{k}\right] dt.$

6. Berechnen Sie in den Aufgaben (a)-(c) den Tangentialeinheitsvektor der Kurve. Berechnen Sie dann die Länge der angegebenen Teilkurven.

a) $\vec{r}(t) = t\vec{i} + \left(\frac{2}{3}\right) t^{\frac{3}{2}} \vec{k}, \quad 0 \le t \le 8.$

b) $\vec{r}(t) = (\cos^3 t)\vec{j} + (\sin^3 t)\vec{k}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

c) $\vec{r}(t) = (t \sin t + \cos t)\vec{i} + (t \cos t - \sin t)\vec{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2.$

Kurzlösungen:

1. **a)** $3^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2$.

b) $y - 2x = 5$.

c) $x + y = \pm 1$.

d) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2^2$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

e) $y = x$, $0 \leq x \leq 2$.

2. **a)** $e^{\pi} - 1$.

b) $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{3}{8}$.

3.
1. d, Ellipsoid
2. i, Hyperboloid
3. a, Zylinder
4. g, Kegel
5. l, hyperbolisches Paraboloid
6. e, elliptisches Paraboloid
7. b, Zylinder
8. j, Hyperboloid
9. k, hyperbolisches Paraboloid
10. f, elliptisches Paraboloid
11. h, Kegel
12. c, Ellipsoid

4. **a)** $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 2+t \\ 2t \\ 2+2t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{q}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} + 2t \\ \sqrt{3} + 4t \\ \frac{2}{3}\pi + 4t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

c) $\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} 2\ln(2) + t \\ 1 + 2t \\ \frac{1}{2} + t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$.

5. **a)** $\dfrac{e-1}{2}\vec{i} + \dfrac{e-1}{e}\vec{j} + \vec{k}$.

b) $\left(\dfrac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j} + 2\vec{k}$.

c) $(\ln 4)\vec{i} + (\ln 4)\vec{j} + (\ln 2)\vec{k}$.

6. **a)** $\vec{T} = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\vec{k}, \; \dfrac{52}{3}$.

b) $\vec{T} = -\cos t\vec{j} + \sin t\vec{k}, \; \dfrac{3}{2}$.

c) $\vec{T} = \cos t\vec{i} - \sin t\vec{j}, \; 1$.