Serie 4: Partielle Ableitungen

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 4 sind der Fokus der Übungsstunden vom 15./17. März.

1. Skizzieren Sie den Graphen sowie einige charakteristische Niveaulinien der folgenden Funktionen und bestimmen Sie ihre Wertebereiche.

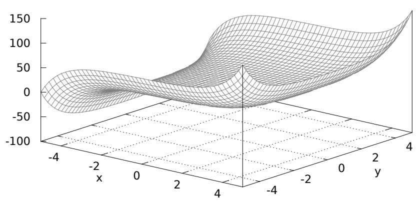
a) $f(x, y) = 2x + 3y$

b) $g(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$

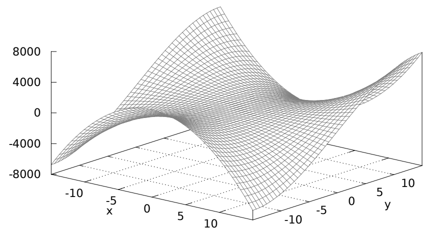
c) $\varphi(x, y) = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + 1$

d) $\psi(x, y) = (x - 2)^2 - 3$

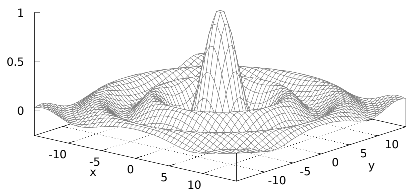
2. Wir betrachten die folgenden Funktionsgraphen



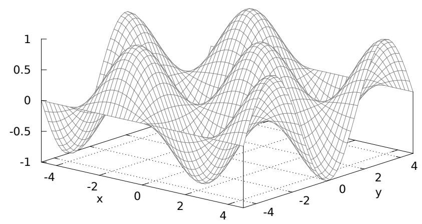
(i)



(ii)

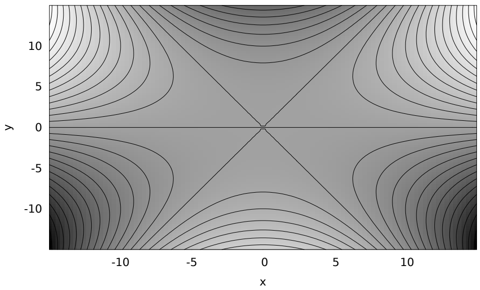


(iii)

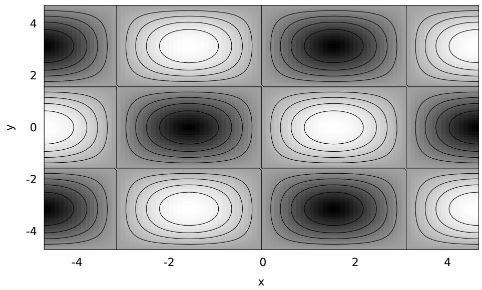


(iv)

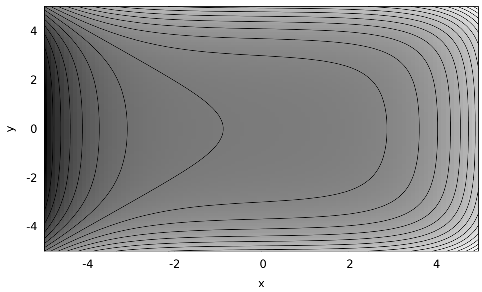
sowie die folgenden Niveaulinienportraits



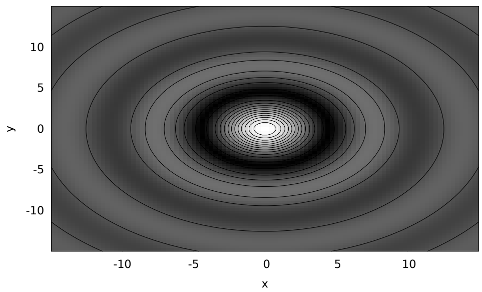
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Ordnen Sie den folgenden Funktionen jeweils einen der Funktionsgraphen (i) - (iv) sowie eines der Niveaulinienportraits (α) - (δ) zu:

a) $(x, y) \mapsto 3x^2y - y^3$

b) $(x, y) \mapsto \sin(x)\cos(y)$

c) $(x, y) \mapsto \dfrac{\sin\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $(x, y) \mapsto \sinh x + \cosh y$

3. In welchen Punkten (x, y) in der Ebene sind die folgenden Funktionen stetig?

a) $f(x, y) = \sin(x + y)$.

b) $f(x, y) = \ln\left(x^2 + y^2\right)$.

c) $f(x, y) = \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$.

d) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{2 + \cos x}$.

4. Bestimmen Sie die (ersten) partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen nach jeder Variable.

a) $f(x, y) = (x^2 - 1)(y + 2)$.

b) $f(x, y) = (xy - 1)^2$.

c) $f(t, \alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$.

d) $h(\varrho, \varphi, \vartheta) = \varrho \sin\varphi \cos\vartheta$.

e) $f(x, y) = \int_x^y g(t)\,dt$, wobei g für alle t stetig sei.

f) **Wilson'sche Formel**

$$A(c, h, k, m, q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}.$$

Hierbei handelt es sich um eine Formel der Warenwirtschaft. Sie gibt die mittleren wöchentlichen Kosten für Bestellung, Bezahlung und Aufbewahrung von Ware an. Dabei ist q die Menge, die sie bestellen, wenn Dinge knapp werden (Schuhe, Radios, Besen oder was Ihnen sonst noch einfällt), k sind die Kosten für eine Bestellung (gleich, unabhängig wie oft sie bestellen), c sind die Kosten eines Stücks, m ist die pro Woche verkaufte Stückzahl, und h sind die wöchentlichen Lagerkosten pro Stück (welche Platz, Hilfsmittel, Versicherung und Betriebsschutz berücksichtigen).

5. Nach dem *Satz von Schwarz* (cf. Analysis 2 von Thomas-Weir-Hass, S. 262-263) darf die Reihenfolge der Differentiationsschritte in einer gemischten partiellen Ableitung k-ter Ordnung vertauscht werden, sofern alle partiellen Ableitungen k-ter Ordnung stetig sind.

Verifizieren Sie dies, indem Sie

a) die gemischten zweiten Ableitungen der Funktion $f(x, y) = x^y$

b) alle gemischten dritten Ableitungen der Funktion $g(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$

berechnen, wo diese definiert sind.

6. Die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

modelliert die Ausbreitung einer Welle auf der reellen Achse (also in einem in beide Richtungen unbegrenzten eindimensionalen Gebiet). Dabei beschreibt w die Höhe der Welle, x ist die Ortsvariable, t die Zeit und c die Geschwindigkeit, mit der sich die Wellen ausbreiten.

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen Lösungen der Wellengleichung sind.

a) $w = \ln(2x + 2ct)$.

b) $w = \tan(2x - 2ct)$.

c) $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$.

d) $w = f(u)$. Dabei ist f eine differenzierbare Funktion von u und $u = a(x + ct)$ mit der Konstanten a.

e) $w = k_1 f_1 + k_2 f_2$, wobei $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ Konstanten und $f_1 = f_1(x, t)$, $f_2 = f_2(x, t)$ Lösungen der Wellengleichung sind.

Kurzlösungen:

1. **a)** Der Graph von f ist die Ebene $2x+3y-z=0$ im $\mathbb{R}^3$. Die Niveaulinie der Funktion f zum Niveau $c\in\mathbb{R}$ ist die durch $y=-\frac{2}{3}x+\frac{c}{3}$ gegebene Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Steigung $-2/3$. Der Wertebereich ist $\mathbb{R}$.

b) Der Graph von g erfüllt die Gleichung $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$, ist also ein *elliptisches Paraboloid.* Das Niveaulinienportrait von g setzt sich zusammen aus dem Ursprung (Niveau 0) und den Ellipsen $\left(\frac{x}{2c}\right)^2+\left(\frac{y}{3c}\right)^2=1$ (Niveau $c^2>0$). Der Wertebereich ist $[0,+\infty)$.

c) Der Graph von φ erfüllt die Gleichung $z-1=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$, ist also ein *hyperbolisches Paraboloid.* Das Niveaulinienportrait von φ setzt sich zusammen aus den beiden Geraden $y=\pm\frac{3}{2}x$ (zum Niveau 1) und den Hyperbeln $y=\pm\frac{3\sqrt{x^2+4(1-c)}}{2}$ (zum Niveau c für $c<1$) und $x=\pm\frac{2\sqrt{y^2+9(c-1)}}{3}$ (zum Niveau c für $c>1$). Der Wertebereich von φ ist gleich $\mathbb{R}$.

d) Der Graph von ψ erfüllt die Gleichung $z=(x-2)^2-3$, ist also ein parabolischer Zylinder. Die Niveaulinien von ψ sind die Geraden $x=\pm\sqrt{c+3}+2$, $c\geq-3$. Der Wertebereich ist $[-3,+\infty)$.

2. **a)** (ii), (α).

b) (iv), (β).

c) (iii), (δ).

d) (i), (γ).

3. **a)** Alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

b) Alle Punkte $(x,y)\neq(0,0)$.

c) Alle Punkte außerhalb der beiden Koordinatenachsen, d.h. (x,y) mit $x\neq0$ oder $y\neq0$.

d) Alle Punkte $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

4. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x(y+2),\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2-1.$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2y(xy-1),\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x(xy-1).$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial t}=-2\pi\sin(2\pi t-\alpha),\quad \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}=\sin(2\pi t-\alpha).$

d) $\dfrac{\partial h}{\partial \varrho}=\sin\varphi\cos\vartheta,\quad \dfrac{\partial h}{\partial \varphi}=\varrho\cos\varphi\cos\vartheta,\quad \dfrac{\partial h}{\partial \vartheta}=-\varrho\sin\varphi\sin\vartheta.$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-g(x),\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=g(y).$

f) $\dfrac{\partial A}{\partial c}=m,\quad \dfrac{\partial A}{\partial h}=\dfrac{q}{2},\quad \dfrac{\partial A}{\partial k}=\dfrac{m}{q},\quad \dfrac{\partial A}{\partial m}=\dfrac{k}{q}+c,\quad \dfrac{\partial A}{\partial q}=-\dfrac{km}{q^2}+\dfrac{h}{2}.$

5. **a)** Für $x>0$, $y\in\mathbb{R}$ gilt:

$$f_x(x,y)=yx^{y-1},\quad f_{xy}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x \quad \text{und}$$
$$f_y(x,y)=x^y\ln x,\quad f_{yx}(x,y)=yx^{y-1}\ln x+x^{y-1}.$$

b) Für alle $x,y\in\mathbb{R}$ ist $g_x(x,y)=\frac{1}{1+x^2}$, $g_y(x,y)=\frac{1}{1+y^2}$, und $g_{xy}=g_{yx}=0$.

6. Ableiten liefert

a) $w_{tt}=-(2c)^2\frac{1}{(2x+2ct)^2}$, $w_{xx}=-2^2\frac{1}{(2x+2ct)^2}$.

b) $w_{tt}=\frac{1}{\cos^3(2x-2ct)}(-2)(-2c)^2(-\sin(2x-2ct))$, $w_{xx}=\frac{1}{\cos^3(2x-2ct)}(-2)(2^2)(-\sin(2x-2ct))$.

c) $w_{tt}=-5\cos(3x+3ct)\cdot(3c)^2+c^2e^{x+ct}$, $w_{xx}=-5\cos(3x+3ct)\cdot(3^2)+e^{x+ct}$.

d) $w_{tt} = f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $w_{xx} = f''(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + f'(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Beachte ferner $\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial u}{\partial x}$ und $u_{tt} = u_{xx} = 0$.

e) Dies folgt aus der Linearität der Ableitungsoperatoren.