Serie 5: Gradient und Linearisierung

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 5 sind der Fokus der Übungsstunden vom 22./24. März.

1. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{4} + \frac{xy}{2}.$$

a) Bestimmen Sie die Richtungen, in denen die Funktion f

i) im Punkt $(2, 4)$ am schnellsten wächst.

ii) im Punkt $(2, 4)$ am schnellsten fällt.

iii) Wie groß ist der Maximal- bzw. Minimalwert der Richtungsableitungen (also die größte Steigung bzw. das größte Gefälle) im Punkt $(2, 4)$?

iv) In welche Richtungen ist die Änderungsrate von f im Punkt $(2, 4)$ gleich Null?

b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $(2, 4)$ in der Richtung von $\vec{v} = \sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}$.

c) Wir betrachten jetzt die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ e^{-t} \sin t. \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Ableitung der zusammengesetzten Funktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad t \mapsto h(t) = f(\gamma(t)),$$

i) direkt, d.h. indem Sie h explizit angeben und ableiten,

ii) mit Hilfe der Kettenregel.

2. Wir betrachten die Kurve $x^3 + 2y^3 + xy = 4$ um den Punkt $(2, -1)$.

a) Gibt es eine Funktion $y = y(x)$ von x, so dass sich die Kurve in der Nähe dieses Punktes als Graph von y darstellen lässt? Wenn ja, welchen Wert hat $y'(2)$?

b) Gibt es eine Funktion $x = x(y)$ von y, so dass sich die Kurve in der Nähe dieses Punktes als Graph von x darstellen lässt? Wenn ja, welchen Wert hat $x'(-1)$?

3. Drücken Sie $\frac{\partial w}{\partial r}$ und $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ als Funktionen von r und θ aus mit

$$w = x + xy - z^2,$$
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = \frac{e^\theta}{r}.$$

4. Die partiellen Ableitungen einer Funktion $f(x, y, z)$ in den Punkten auf der Helix

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

seien

$$f_x = \cos t, \quad f_y = \sin t, \quad f_z = t^2 + t - 2.$$

a) In welchen Punkten der Kurve hat f, wenn als Funktion eingeschränkt auf die Kurve betrachtet, Extrema?

Hinweis: Berechnen Sie $\frac{df}{dt}$.

b) Geben Sie eine bestimmte Funktion $f(x, y, z)$, die diese partiellen Ableitungen auf der Helix besitzt.

Es gibt unendlich viele korrekte Lösungen.

Hinweis: Schreiben Sie die gegebenen partiellen Ableitungen bezüglich x, y und z, statt t.

5. Wir betrachten die durch $f(x, y) = \ln\Big((x-1)^2 + y - 3\Big) - y$ gegebene Funktion f.

a) Skizzieren Sie den (maximalen) Definitionsbereich der Funktion f. Ist der Definitionsbereich offen? Was ist sein Rand?

b) Geben Sie den Gradienten von f allgemein und im Punkt $(0, 4)$ an.

c) Zu welchem Wert gehört die Niveaulinie von f durch den Punkt $(0, 4)$?

d) Bestimmen Sie die Tangente an die Niveaulinie von f durch $(0, 4)$.

e) Bestimmen Sie die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(0, 4)$.

f) Bestimmen Sie diejenigen Punkte, in denen die Tangentialebene an den Graphen der Funktion f parallel zur xy-Ebene liegt.

g) Bestimmen Sie eine quadratische Näherung der Funktion f in der Nähe von $(0, 3)$.

6. Wir betrachten die durch $f(x, y) = (\sin x)^y$ gegebene Funktion f.

a) Approximieren Sie die Funktion f um den Punkt $\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ linear.

b) Schätzen Sie die resultierende Änderung in $f\left(\frac{\pi}{6}, 2\right)$ ab, bei Abweichungen von

$$dx = \frac{\pi}{180}, \; dy = -0.02.$$

Sie dürfen einen Taschenrechner benutzen.

c) Geben Sie mit Hilfe der Linearisierung eine Näherung für die Zahl $(\sin 31°)^{1.98}$. Sie dürfen wieder einen Taschenrechner für das Endresultat benutzen.

Kurzlösungen:

1. **a)** i) $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

ii) $\frac{1}{\sqrt{10}}(-1,-3)$.

iii) $\pm\sqrt{10}$.

iv) $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)$.

b) $\frac{\sqrt{3}+3}{2}$.

c) i) $h(t) = \frac{e^{-2t}}{4}\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right), \quad h'(t) = e^{-2t}\cos(2t)$.

ii) $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t)) = (-(x(t)+y(t)), x(t)-y(t)), \quad f_x(x,y) = -\frac{x-y}{2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x+y}{2}, \quad h'(t)$ wie in i).

2. **a)** Ja, $\quad y'(2) = -\frac{11}{8}$.

b) Ja, $\quad x'(-1) = -\frac{8}{11}$.

3. $\frac{\partial w}{\partial r} = \cos\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + 2\frac{e^{2\theta}}{r^3}$
$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -r\sin\theta - r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta - 2\frac{e^{2\theta}}{r^2}$.

4. **a)** $(\cos(-2), \sin(-2), -2), \quad (\cos(1), \sin(1), 1)$.

b) Mögliche Antwort $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} - 2z$.

5. **a)** Definitionsbereich: $(x-1)^2 + y - 3 > 0$, ist offen, Rand ist $y = -(x-1)^2 + 3$.

b) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(x-1)}{(x-1)^2+y-3} \\ \frac{4-(x-1)^2-y}{(x-1)^2+y-3} \end{pmatrix}$ und $\nabla f(0,4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

c) $\ln(2) - 4$.

d) $2x + y = 4$.

e) $2x + y + 2z = \ln 4 - 4$.

f) $(1,4)$.

g) $-x^2 - 8x + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + 3y - \frac{15}{2}$.

6. **a)** $\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\ln 2}{4}(y-2)$.

b) ≈ 0.018581

c) ≈ 0.268581.