Serie 6: Extremwerte und der Satz von Fubini

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 6 sind der Fokus der Übungsstunden vom 5./7. April.

1. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf lokale Extrema und Sattelpunkte, d.h. bestimmen Sie die kritischen Punkte und untersuchen Sie diese:

a) $f(x,y) = -x^2 - 2x + xy - y^2 - 2y + 4$

b) $g(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$

c) $h(x,y) = \left(5x^2 + 7y^2\right) e^{-x^2-y^2}$

d) $\phi(x,y) = e^{2x} \cos y$

2. Die Funktion $f(x,y) = 3\,x^4 - 4\,x^2\,y + y^2$ besitzt ihren einzigen kritischen Punkt im Koordinatenursprung. Zeigen Sie:

a) Die Einschränkung der Funktion f auf eine beliebige Gerade durch den Koordinatenursprung nimmt dort ein lokales Minimum an.

b) Die Einschränkung der Funktion f auf die Parabel $y = \frac{3}{2}\,x^2$ durch den Koordinatenursprung nimmt dort ein globales Maximum an.

c) Was für eine Art von kritischem Punkt ist somit der Ursprung für die Funktion f?

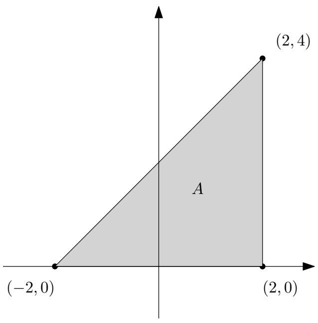
3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf dem jeweils angegebenen Bereich auf globale Extrema. Vergessen Sie nicht, die Randstellen zu berücksichtigen.

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$

auf dem abgeschlossenen Bereich A, der durch die drei Geraden

$$x = 2, \quad y = 0, \quad \text{und} \quad y - x = 2$$

begrenzt wird.

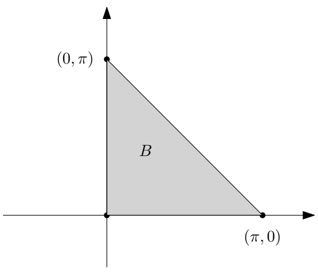


b) $g(x,y) = \sin x\, \sin y$

auf dem abgeschlossenen Bereich B, der durch die drei Geraden

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \text{und} \quad x + y = \pi$$

begrenzt wird.

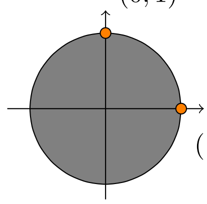


c) $h(x, y) = x^2 y$

auf der abgeschlossenen Kreisscheibe C, die durch den Einheitskreis

$$x^2 + y^2 = 1$$

begrenzt wird.



Hinweis: Benutzen Sie zur Untersuchung der Randpunkte die gewöhnliche Parametrisierung des Kreises, $(x, y) = (\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, und betrachten Sie die Verkettung $h(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. Es bezeichne Q das Quadrat

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

Berechnen Sie den Wert der folgenden Doppelintegrale:

a) $\displaystyle\iint_Q e^{x+y}\, dx\, dy$

b) $\displaystyle\iint_Q \frac{x^2}{1+y^2}\, dx\, dy$

c) $\displaystyle\iint_Q \frac{1}{(x+y+1)^2}\, dx\, dy$

d) $\displaystyle\iint_Q \frac{xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}\, dx\, dy$

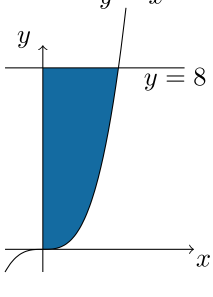
Hinweis: Satz von Fubini.

5. Stellen Sie in den Aufgaben **a)-d)** ein iteriertes Integral für $\iint_R dA$ über dem angegebenen Gebiet R auf, und zwar

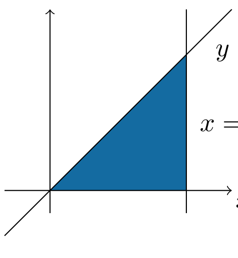
i) mit vertikalen Querschnitssflächen, d.h. ein Doppelintegral der Form $\int\int\ dy\ dx$, und

ii) mit horizontalen Querschnitssflächen, d.h. ein Doppelintegral der Form $\int\int\ dx\ dy$.

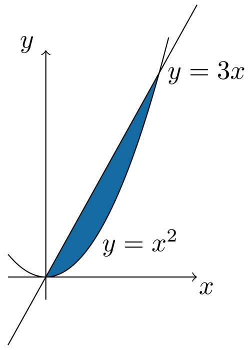
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie die Integrale berechnen.



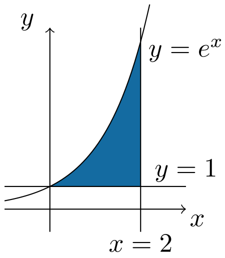
a)



b)



c)



d)

6. Wir betrachten die folgenden Integrale

i) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} f(x,y)\,dx\,dy$ **ii)** $\displaystyle\int_{-1}^2 \int_{-x}^{2-x^2} g(x,y)\,dy\,dx$

iii) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\,dy$ **iv)** $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{1} x^3 \sin y^3\,dy\,dx$

wobei f und g beliebige (integrierbare) Funktionen bezeichnen.

a) Skizzieren Sie für die Integralen **i)-iv)** jeweils das Integrationsgebiet.

b) Vertauschen Sie in den Integralen **i)-iv)** die Reihenfolge der Integrationen, so dass die innere Variable jeweils zur äusseren wird und umgekehrt.

c) Berechnen Sie die Integrale **iii)** und **iv)**.
Hinweis: Wählen Sie die Integrationsreihenfolge sorgfältig.

Kurzlösungen:

1. **a)** $(-2,-2)$ lokales Maximum.

b) $(0,0)$ Sattelpunkt,
$(-1,-1)$ lokales Maximum.

c) $(0,0)$ globales Minimum,
$(0,1)$, $(0,-1)$ lokale Maxima,
$(1,0)$, $(-1,0)$ Sattelpunkte.

d) keine lokalen Extrema und keine Sattelpunkte.

2. **a)** $f(x,mx) = 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2$, kritischer Punkt in 0, $(f(x,mx))'|_{x=0} = 2m^2 > 0$, Minimum in 0.

b) $f\left(x, \frac{3x^2}{2}\right) = -\frac{3}{4}x^4$, globales Maximum im Ursprung.

c) f hat einen Sattelpunkt in $(0,0)$.

3. **a)** globales Maximum 8 in $(-2,0)$,
globales Minimum -1 in $(1,0)$.

b) globales Maximum 1 in $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
globales Minimum 0 in (x,y) mit $xy = 0$.

c) globale Maxima $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ bei $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}})$,
globale Minima $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ bei $(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{3}})$.

4. **a)** $(e-1)^2$.

b) $\frac{\pi}{12}$.

c) $\ln\frac{4}{3}$.

d) $2\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1$.

5. **a)** i) $\int_0^2 \int_{x^3}^8 \ dy\ dx = 12$.
ii) $\int_0^8 \int_0^{y^{\frac{1}{3}}} \ dx\ dy = 12$.

b) i) $\int_0^3 \int_0^{2x} \ dy\ dx = 9$.
ii) $\int_0^6 \int_{\frac{1}{2}y}^3 \ dx\ dy = 9$.

c) i) $\int_0^3 \int_{x^2}^{3x} \ dy\ dx = \frac{9}{2}$.
ii) $\int_0^9 \int_{\frac{1}{3}y}^{\sqrt{y}} \ dx\ dy = \frac{9}{2}$.

d) i) $\int_0^2 \int_1^{e^x} \ dy\ dx = e^2 - 3$.
ii) $\int_1^{e^2} \int_{\ln(y)}^2 \ dx\ dy = e^2 - 3$.

6. **a)** **i)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 2,\ y^3 \le x \le 4\sqrt{2y}\}$.
ii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \le x \le 2,\ -x \le y \le 2 - x^2\}$.
iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 1,\ 3y \le x \le y\}$.
iv) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 1\}$.

b) **i)** $\displaystyle\int_0^8 \int_{x^2/32}^{\sqrt[3]{x}} f(x,y)\,dy\,dx$.

ii) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \int_{\max\{-y,-\sqrt{2-y}\}}^{\sqrt{2-y}} g(x,y)\,dx\,dy$.

iii) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx$.

iv) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin y^3 \, dx \, dy.$

c) **iii)** $\frac{1}{6}\left(e^9 - 1\right).$

iv) $\frac{1}{12}(1 - \cos 1).$