Serie 7: Mehrfachintegrale und ihre Hauptsubstitutionen

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 7 sind der Fokus der Übungsstunden vom 12./14. April.

1. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale mittels kartesischer Koordinaten.
Handreichung: Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kurven. Skizzieren Sie den Integrationsbereich. Drücken Sie das Doppelintegral als zwei nacheinander auszuführende Integrationen mit geeigneten Integrationsgrenzen aus.

a) $\displaystyle\iint_A \cos(x+y)\,dx\,dy$, $\quad A:$ der von $x=0$, $y=\pi$, $y=x$ begrenzte Bereich.

b) $\displaystyle\iint_B (x^2+y)\,dx\,dy$, $\quad B:$ der von $x=y^2$ und $x^2=y$ begrenzte Bereich.

c) $\displaystyle\iint_C \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, $\quad C:$ der von $x=2$, $y=x$ und $xy=1$ begrenzte Bereich.

d) $\displaystyle\iint_D 2xy\,dx\,dy$, $\quad D:$ die Menge $x^2+y^2\le 4$, $x^2+(y-2)^2\le 4$, $x\ge 0$,.

2. Berechnen Sie die folgenden Doppelintegrale mittels Polarkoordinaten:

a) $\displaystyle\iint_A (1-2\,x-3\,y)\,dx\,dy$, $A:$ die Kreisscheibe $x^2+y^2\le 4$.

b) $\displaystyle\iint_B e^{x^2+y^2-1}\,dx\,dy$, $B:$ der Kreissektor $x^2+y^2\le 1$, $x,y\ge 0$.

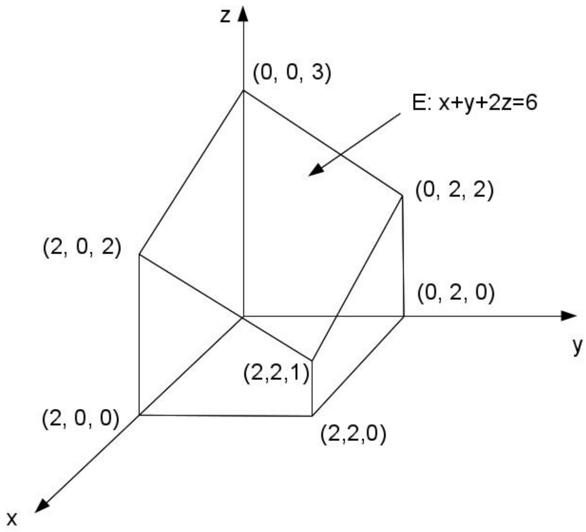
c) $\displaystyle\iint_C \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$, $C:$ der Ringteil $1\le x^2+y^2\le 9$, $x,y\ge 0$.

d) $\displaystyle\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,dx\,dy$, $D:$ der Ringteil $1\le x^2+y^2\le 9$, $x/\sqrt{3}\le y\le\sqrt{3}\,x$.

3. Berechnen Sie das Volumen des Polyeders

$$P=\{(x,y,z)\mid x\in[0,2],\ y\in[0,2],\ z\ge 0,\ x+y+2z\le 6\}$$

auf zwei verschiedene Arten (Integrationsreihenfolge) und vergewissern Sie sich, dass die Resultate übereinstimmen.



4. Berechnen Sie durch Einführen geeigneter Koordinaten das endliche Volumen, das durch

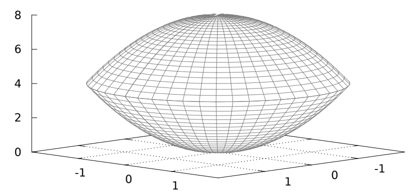
a) die Paraboloide

$$z = x^2 + y^2$$

und

$$z = 8 - x^2 - y^2$$

begrenzt wird.



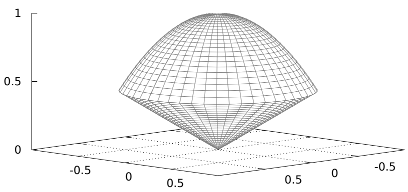
b) den Kegel

$$x^2 + y^2 = 3z^2, \quad z \geq 0,$$

und die Sphäre

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

begrenzt wird.



5. Berechnen Sie durch Einführen geeigneter Koordinaten

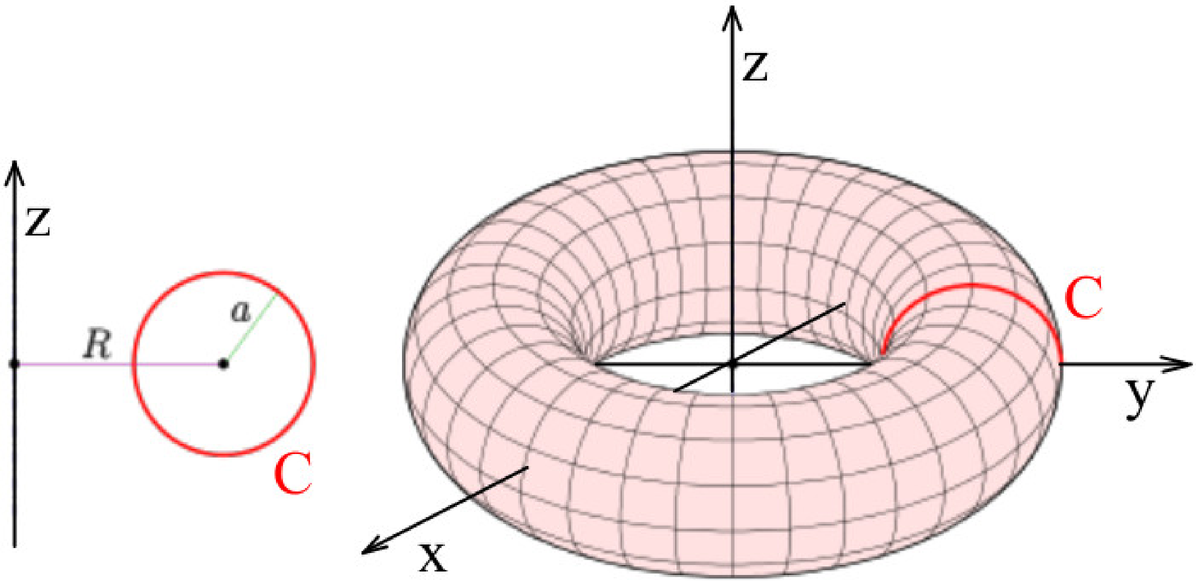
a) die Masse einer Kugel vom Radius 2, deren Dichte proportional zur dritten Potenz des Abstandes vom Mittelpunkt ist und im Einheitsabstand den Wert $\frac{1}{4}$ hat.

b) den Schwerpunkt des homogenen Körpers, der durch

$$\text{das Paraboloid } z = \frac{x^2 + y^2}{2} \qquad \text{und die Sphäre } x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

im Halbraum $z \geq 0$ begrenzt wird.

6. Ein **Torus** oder Donut entsteht, wenn man einen Kreis C in der yz-Ebene um die z-Achse rotiert; vgl. die nachfolgende Abbildung.



Sei C ein Kreis mit dem Radius $a > 0$ und dem Mittelpunkt $(0, R, 0)$.

a) Schreiben Sie die Gleichung dieses Kreises in der yz-Ebene.

b) Schreiben Sie nun die Gleichung des Torus in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: Hat man eine Kurve in der yz-Ebene mit der Gleichung $F(y, z) = 0$ and rotiert diese um die z-Achse, so erfüllt die enstehende Rotationsfläche die Gleichung $F(r, z) = 0$, wobei r die radiale Koordinate der Zylinderkoordinaten sei.

c) Bestätigen Sie, dass sich der Torus-Körper in Zylinderkoordinaten wie folgt beschreiben lässt:

$$\begin{array}{rcccl} R - \sqrt{a^2 - z^2} & \leq & r & \leq & R + \sqrt{a^2 - z^2}, \\ 0 & \leq & \theta & \leq & 2\pi, \\ -a & \leq & z & \leq & a. \end{array}$$

d) Bestimmen Sie das Volumen des Torus.

Kurzlösungen:

1. **a)** -2.

b) $\frac{33}{140}$.

c) $\frac{9}{4}$.

d) $\frac{10}{3}$.

2. **a)** 4π.

b) $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

c) 1.

d) $\frac{\pi^2}{6}$.

3. 8.

4. **a)** 16π.

b) $\frac{\pi}{3}$.

5. **a)** $\frac{32\pi}{3}$.

b) $\left(0, 0, \frac{5}{83}\left(6\sqrt{3}+5\right)\right)$.

6. **a)** $(y-R)^2+z^2=a^2$.

b) $(r-R)^2+z^2=a^2$.

c) Für jedes $z \in (-a, a)$ ist der Querschnitt des Donut ein Kreisring mit äußerem Radius $R+\sqrt{a^2-z^2}$ und innerem Radius $R-\sqrt{a^2-z^2}$. Für $z=\pm a$ degenerieren die Kreisringe zu der Kreislinie $r=R$ und kein Punkt auf dem Donut hat $|z|>a$.

d) $2\pi^2 Ra^2$.