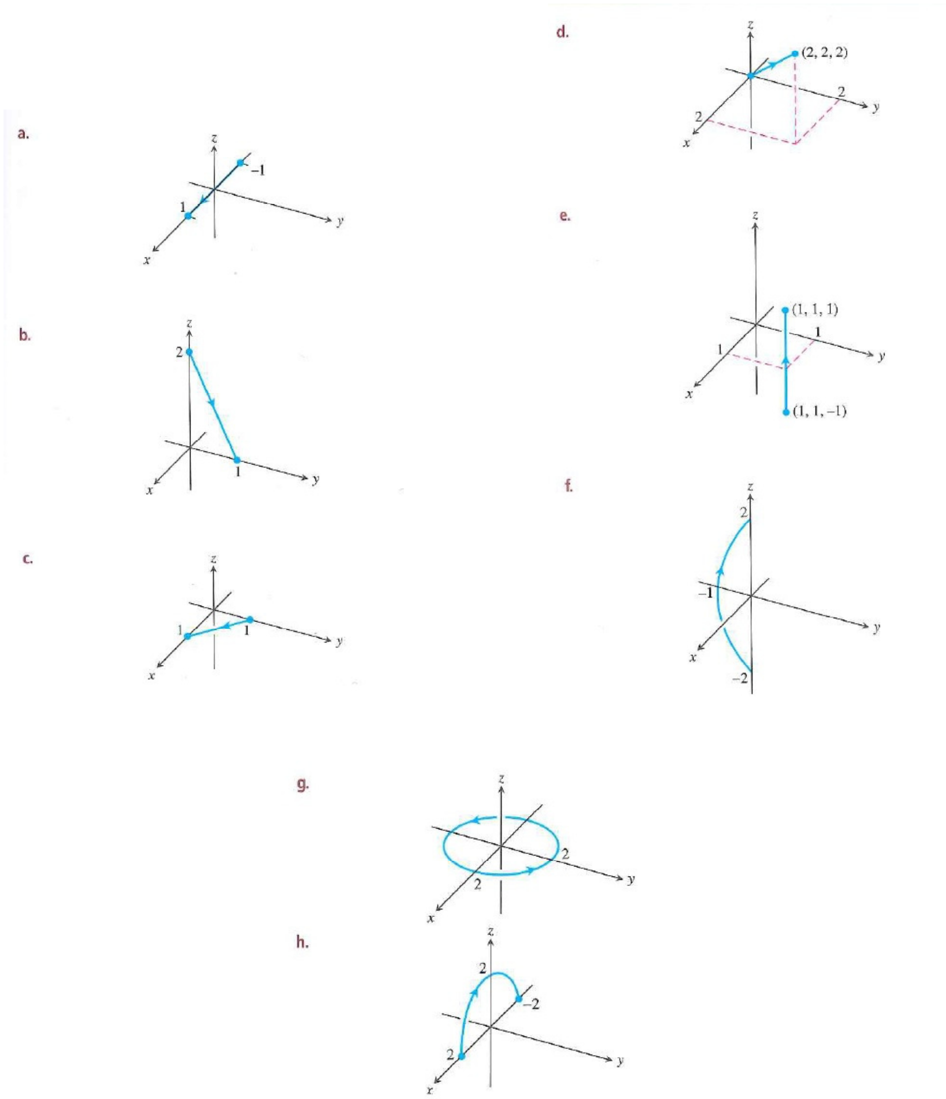
Serie 8: Vektorfelder und Kurvenintegrale

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 8 sind der Fokus der Übungsstunden vom 19./21. April.

1. Ordnen Sie den parametrisierten Kurven in 1)-8) die folgenden Graphen a.-h. zu.



1) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + (1-t)\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 1.$

2) $\vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\,\vec{k}, \quad -1 \le t \le 1.$

3) $\vec{r}(t) = (2\cos t)\,\vec{i} + (2\sin t)\,\vec{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$

4) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i}, \quad -1 \le t \le 1.$

5) $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + t\,\vec{k}, \quad 0 \le t \le 2.$

6) $\vec{r}(t) = t\,\vec{j} + (2-2t)\,\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$

7) $\vec{r}(t) = (t^2-1)\,\vec{j} + 2t\,\vec{k}, \quad -1 \leq t \leq 1.$

8) $\vec{r}(t) = (2\cos t)\,\vec{i} + (2\sin t)\,\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq \pi.$

2. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

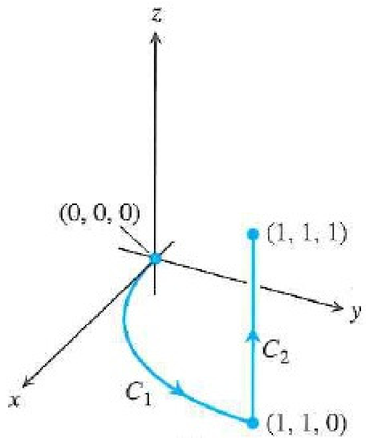
a) $\int_C x\,ds$ entlang des ebenen Geradenabschnitts $x = t$, $y = \frac{t}{2}$ von $(0,0)$ bis $(4,2)$.

b) $\int_C x\,ds$ entlang der räumlichen Parabel $x = t$, $y = t^2$ von $(0,0)$ bis $(2,4)$.

c) $\int_C (x+y+z)\,ds$ entlang des räumlichen Geradenabschnitts von $(1,2,3)$ bis $(0,-1,1)$.

d) $\int_C (x+\sqrt{y}-z^2)\,ds$ entlang der räumlichen Kurve von $(0,0,0)$ bis $(1,1,1)$ (vgl. die nachfolgende Abbildung) die gegeben ist durch:

$$C_1: \quad \vec{r}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$
$$C_2: \quad \vec{r}(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\,\vec{k}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$



e) Die Masse eines schraubenartigen Drahtes mit Parametrisierung

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$$

mit Radius $r > 0$, Ganghöhe $2\pi h > 0$ und Dichte $\delta(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z}$.

3. Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes F entlang des Weges γ, wobei

a) $F(x, y) = (x, y)^T$,
γ: die Strecke von $A = (1, 0)$ nach $B = (0, 2)$,

b) $F(x, y) = (2x - y, x + 2y)^T$,
γ: der Einheitskreis um den Ursprung, positiv orientiert,

c) $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)^T$,
γ: die Ellipse $4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$, positiv orientiert.

d) Parametrisieren Sie in einer der obigen Aufgaben γ auf eine zweite Art und überzeugen Sie sich, dass dadurch das Linienintegral seinen Wert nicht ändert.

4. Zwei Möglichkeiten, ein Arbeitsintegral zu berechnen

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(x, y) = \nabla(x^3y^2)$. Sei C der Weg in der xy- Ebene von $(-1, 1)$ nach $(1, 1)$. Er besteht aus dem Geradenabschnitt von $(-1, 1)$ nach $(0, 0)$ und dem Geradenabschnitt von $(0, 0)$ bis $(1, 1)$. Berechnen Sie $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ folgendermassen:

a) Bestimmen Sie Parametrisierungen für die Geradenabschnitte, aus denen die Kurve C besteht, und berechnen Sie das Integral.

b) Verwenden Sie $f(x, y) = x^3y^2$ als Potentialfunktion für $\vec{F}$.

5. Berechnen Sie die Arbeit der folgenden Vektorfelder F entlang der Kurven C. Bestimmen Sie zudem jeweils den (maximalen) Definitionsbereich des Vektorfeldes F und entscheiden Sie, ob es sich bei F um ein Gradientenfeld handelt oder nicht.

a) $F(x, y) = \big(xy^2, x^2y + 2\big)^T$,
C: der Viertelkreisbogen zentriert im Ursprung von $(-8, 8)$ nach $(-8, -8)$.

b) $F(x, y) = \big(x \ln y, x^2/2y\big)^T$,
C: das Dreieck mit den Ecken $(1, 1)$, $(3, 1)$ und $(3, 2)$, positiv orientiert.

c) $F(x, y) = \left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}, \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)^T$,
C: der Abschnitt von $(3, 4)$ bis $(5, 12)$ auf der Parabel $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

d) $F(x, y) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)^T$,
C: der Kreis um den Ursprung mit Radius $r > 0$, positiv orientiert.

6. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Vektorfeldern $\vec{F}$ um Gradientenfelder handelt. Bestimmen Sie gegebenenfalls eine Potentialfunktion oder geben Sie eine geschlossene Kurve C an, so dass $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

a) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x \end{pmatrix}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ y-z \\ x-y \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yze^{xyz}+1 \\ xze^{xyz}+\frac{2}{y} \\ xye^{xyz} \end{pmatrix}$

d) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{z}{x^2+z^2} \\ y \\ \frac{-x}{x^2+z^2} \end{pmatrix}$.

Hinweis: vgl. Aufgabe 5. d).

Kurzlösungen:

1.
1) c.
2) e.
3) g.
4) a.
5) d.
6) b.
7) f.
8) h.

2.
a) $4\sqrt{5}$.

b) $\frac{1}{12}\left(17^{\frac{3}{2}}-1\right)$.

c) $3\sqrt{14}$.

d) $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}+9\right)$.

e) $\sqrt{\frac{r^2}{h^2}+1}\,e^{r^2}\left(e^{2\pi h}-1\right)$.

3.
a) $\frac{3}{2}$.

b) 2π.

c) 2π.

4.
a) $2=1+1$.

b) $2=1-(-1)$.

5.
a)
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}^2$;
- Arbeit: -32;
- Gradientenfeld: Ja, mögliche Potentialfunktion $\phi(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+2y$.

b)
- Definitionsbereich: $x\in\mathbb{R},\ y>0$;
- Arbeit: 0;
- Gradientenfeld: Ja, mögliche Potentialfunktion $\phi(x,y)=\frac{x^2\ln y}{2}$.

c)
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;
- Arbeit: $\ln\frac{13}{5}$;
- Gradientenfeld: Ja, mögliche Potentialfunktion $\phi(x,y)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

d)
- Definitionsbereich: $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$;
- Arbeit: 2π;
- Gradientenfeld: Nein.

6.
a) Kein Gradientenfeld; für C der positiv orientierte Einheitskreis in der xy-Ebene ist $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=2\pi$.

b) Mögliche Potentialfunktion $\phi(x,y,z)=\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+xz-yz$.

c) Mögliche Potentialfunktion $\phi(x,y,z)=e^{xyz}+x+\ln(y^2)$.

d) Kein Gradientenfeld; für C der positiv orientierte Einheitskreis in der xz-Ebene ist $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=-2\pi$.