Serie 9: Der Satz von Green und Parametrisierungen von Flächen im Raum

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 9 sind der Fokus der Übungsstunden vom 26./28. April.

1. Überprüfung des Satzes von Green

Der Satz von Green besagt für den Fluss eines Vektorfeldes $\vec{F} = M\,\vec{i} + N\,\vec{j}$ durch eine geschlossene Kurve C (von innen nach außen)

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dx\, dy \tag{1}$$

und für die Zirkulation entlang C im positiven Sinne

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx\, dy, \tag{2}$$

wobei R das von der Kurve C eingeschlossene Gebiet darstellt.

Prüfen Sie in den folgenden Aufgaben die Aussage des Satzes von Green, indem Sie beide Seiten der Gleichungen (1) und (2) berechnen. Verwenden Sie als Integrationsgebiet in jedem Fall die Kreisscheibe

$$R: \; x^2 + y^2 \leq a^2$$

mit dem Rand

$$C: \; \vec{r} = (a\cos t)\vec{i} + (a\sin t)\vec{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

a) $\vec{F} = -y\,\vec{i} + x\,\vec{j}$.

b) $\vec{F} = y\,\vec{i}$.

c) $\vec{F} = 2x\,\vec{i} - 3y\,\vec{j}$.

d) $\vec{F} = -x^2 y\,\vec{i} + xy^2\,\vec{j}$.

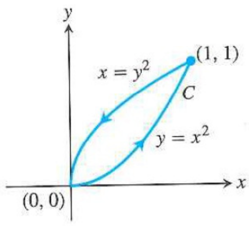
2. Zirkulation und Fluss

Bestimmen Sie in den folgenden Aufgaben mithilfe des Satzes von Green die Zirkulation entgegen dem Uhrzeigersinn und den nach außen gerichteten Fluss des Feldes $\vec{F}$ durch die Kurve C.

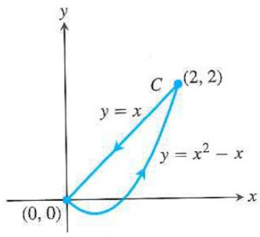
a) $\vec{F} = (x-y)\,\vec{i} + (y-x)\,\vec{j}$,
C : die Randkurve des Quadrats zwischen $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$.

b) $\vec{F} = (y^2 - x^2)\,\vec{i} + (x^2 + y^2)\,\vec{j}$,
C : Die Randkurve des Dreiecks zwischen $y = 0$, $x = 3$ und $y = x$.

c) $\vec{F} = (xy + y^2)\,\vec{i} + (x - y)\,\vec{j}$



d) $\vec{F} = x^3y^2\,\vec{i} + \frac{1}{2}x^4y\,\vec{j}$



3. Anwendung des Satzes von Green

Der Fluss eines Vektorfeldes **entlang** einer ebenen geschlossenen Kurve $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds$ lässt sich alternativ als

$$\oint_C F_1\,dx + F_2\,dy$$

schreiben, wobei $\vec{F} = (F_1, F_2)^T$. Verwenden Sie den Satz von Green, um die folgenden Integrale zu berechnen.

a) $\oint_C (y^2\,dx + x^2\,dy)$,
C : Der Rand des Dreiecks zwischen $x = 0$, $x + y = 1$, $y = 0$.

b) $\oint_C (6y + x)\,dx + (y + 2x)\,dy$,
C : Der Kreis $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.

4. Flächenparametrisierungen

Finden Sie Parametrisierungen für die nachfolgend beschriebenen Flächenstücke.

a) Geneigte Ebene im Innern eines Zylinders

Der Teil der Ebene $y + 2z = 2$ im Innern des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$.

b) Kegelstumpf

Der Teil des Kegels $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ zwischen den Ebenen $z = 2$ und $z = 6$.

c) Kreiszylinderband

Der Teil des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ zwischen den Ebenen $z = 1$ und $z = 4$.

d) Parabolische Kappe

Die von dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ aus dem Paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ ausgeschnittene Kappe.

e) Abgesägte Kugel

Der untere Teil der von dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ geschnittenen Fläche.

5. Für jede der folgenden Flächen,

I. skizzieren Sie die Fläche in einem xyz-Koordinatensystem,

II. geben Sie eine Parametrisierung $\vec{r}(u, v)$ der Fläche an,

III. tragen Sie einige Koordinatenlinien, die sich aus der von Ihnen gewählten Parametrisierung ergeben ($u =$ konst., $v =$ konst.), in Ihre Skizze ein und

IV. bestimmen Sie einen Normalenvektor (nicht unbedingt Einheitsvektor) als Funktion der gewählten Parameter u und v.
Hinweis: $\vec{n}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$,

V. Wo auf der Fläche – wenn überhaupt – ist der Normalenvektor parallel zu $(1, 0, 1)^T$?

a) Ein Chip beschrieben durch

$$z = x^2 - y^2, \; x^2 + y^2 \leq 9.$$

b) Eine Parabolantenne beschrieben durch

$$z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, \; 0 \leq z \leq 3.$$

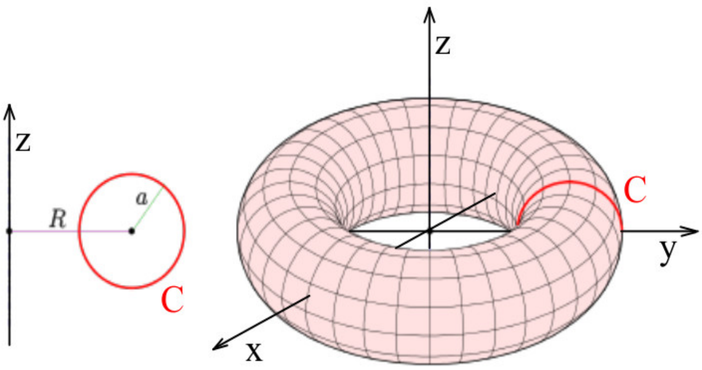
c) Die Außenwand eines Kühlturms beschrieben durch

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{4} + 300, -20 \leq z \leq 10$$

6. In Aufgabe 6 von Serie 7 wurde ein Torus $\mathcal{T}$ durch die Gleichung

$$(r - R)^2 + z^2 = a^2 \tag{$\star$}$$

in Zylinderkoordinaten dargestellt, wobei a und R die relevanten gegebenen Radien sind; siehe Bild.



Wir parametrisieren nun diesen Torus durch

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + a\cos(v))\cos(u) \\ (R + a\cos(v))\sin(u) \\ a\sin(v). \end{pmatrix}$$

a) Prüfen Sie nach, dass die radiale Koordinate $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ der Zylinderkoordinaten die Beziehung

$$r = R + a\cos(v)$$

erfüllt. Daraus folgt, dass diese Parametrisierung der Gleichung $(\star)$ genügt.

Welche Intervalle sollen wir für u und v wählen, um den gesamten Torus zu parametrisieren?

b) Die Gitternetzlinien im Bild sind Koordinatenlinien, d.h. Kurven, die sich aus $\vec{r}(u, v)$ für festgehaltene Werte von v bzw. u ergeben. Welche sind die u-Koordinatenlinien ($v = \text{konst.}$) und welche die v-Koordinatenlinien ($u = \text{konst.}$)?

c) Bestimmen Sie einen Einheitsnormalenvektor $\vec{N}$ im Punkt $(x, y, z) = (R+\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{a\sqrt{2}}{2})$ mithilfe der Parametrisierung.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Parameter (u, v), sodass

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} R + \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

d) Finden Sie nun einen Funktion $g(x, y, z)$, die den Torus als eine Niveaufläche hat, also dass

$$\mathcal{T} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \; g(x, y, z) = c\right\},$$

wobei c eine geeignete Konstante ist. *Hinweis:* Schreiben Sie die Gleichung $(\star)$ in kartesischen Koordinaten, indem Sie r durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ ersetzen.

e) Bestimmen sie nochmals einen Einheitsnormalenvektor im Punkt

$$(x, y, z) = (R + \frac{a\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{a\sqrt{2}}{2}),$$

dieses Mal mithilfe des Gradienten von $g(x, y, z)$. Ihr Ergebnis hier sollte gleich $\pm\vec{N}$, also bis auf (höchstens) das Vorzeichen der Vektor von Teilaufgabe c) sein.

Kurzlösungen:

1. **a)**
- Fluss durch C: 0,
- Zirkulation: $2\pi a^2$.

b)
- Fluss durch C: 0,
- Zirkulation: $-\pi a^2$.

c)
- Fluss durch C: $-\pi a^2$,
- Zirkulation: 0.

d)
- Fluss durch C: 0,
- Zirkulation: $\frac{a^4}{2}\pi$.

2. **a)**
- Fluss durch C: 2;
- Zirkulation entlang C: 0.

b)
- Fluss durch C: -9;
- Zirkulation entlang C: 9.

c)
- Fluss durch C: $-\frac{11}{60}$;
- Zirkulation entlang C: $-\frac{7}{60}$.

d)
- Fluss durch C: $\frac{64}{9}$;
- Zirkulation entlang C: 0.

3. **a)** 0.

b) -16π.

4. **a)** Mithilfe von Zylinderkoordinaten z.B.: $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 1 - \frac{r}{2}\sin(\theta)),\ 0 \le r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi$.

b) Mithilfe von Zylinderkoordinaten: $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2r),\ 1 \le r \le 3$.

c) Mithilfe von Zylinderkoordinaten: $(\cos(\theta), \sin(\theta), z)\ , 0 \le \theta < 2\pi,\ 1 \le z \le 4$.

d) Mithilfe von Zylinderkoordinaten: $(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2 - r^2),\ 0 \le r \le 1, 0 \le \theta < 2\pi$.

e) Mithilfe von Kugelkoordinaten: $(\sqrt{2}\cos(\theta)\sin(\varphi), \sqrt{2}\sin(\theta)\sin(\varphi), \sqrt{2}\cos(\varphi)),\ \theta \in [0, 2\pi),\ \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$.

5. a) **Chip:**

I. siehe lange Lösung

II. In kartesischen Koordinaten: $\vec{r}(x,y) = (x, y, x^2 - y^2)^T,\ -3 \le x \le 3,\ -\sqrt{9 - x^2} \le y \le \sqrt{9 - x^2}$,
in Zylinderkoordinaten: $\vec{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), u^2\cos(2v))^T,\ 0 \le u \le 3,\ 0 \le v < 2\pi$.

III. siehe lange Lösung

IV. In kartesischen Koordinaten: $\vec{n}(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$,
in Zylinderkoordinaten: $\vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -2u^2\cos(v) \\ 2u^2\sin(v) \\ u \end{pmatrix}$.

V. $(x,y,z) = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4})$.

b) **Parabolantenne:**

I. siehe lange Lösung

II. $\vec{r}(u,v) = (3\sqrt{u}\cos(v), 2\sqrt{u}\sin(v), u),\ 0 \le u \le 3,\ 0 \le v < 2\pi$.

III. siehe lange Lösung

IV. $\vec{n}(u,v) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{u}\cos(v) \\ -3\sqrt{u}\sin(v) \\ 3 \end{pmatrix}$.

V. $(x,y,z) = (-\frac{9}{2}, 0, \frac{9}{4})$.

c) **Kühlturm:**

I. siehe lange Lösung

II. $(10\sqrt{3}\cosh(u)\cos(v), 10\sqrt{3}\cosh(u)\sin(v), 20\sqrt{3}\sinh(u))$,
$-\operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \leq u \leq \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\ 0 \leq v < 2\pi$.

III. siehe lange Lösung

IV. $\vec{n}(u,v) = 300\cosh(u)\begin{pmatrix} -2\cosh(u)\cos(v) \\ -2\cosh(u)\sin(v) \\ \sinh(u) \end{pmatrix}$.

V. Es gibt keinen solchen Punkt.

6. **a)** $(r-R)^2 + z^2 = (a\cos(v))^2 + (a\sin(v))^2 = a^2$

b) u-Koordinatenlinien: horizontale Kreise,
v-Koordinatenlinien: vertikale Kreise.

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Z.B. $g(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 - a^2$.

e) $\nabla g(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2}) = \begin{pmatrix} 2a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 2a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ und $\left\|\nabla g(R + a\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, a\frac{\sqrt{2}}{2})\right\| = 2a$.