# Serie 10: Oberflächenintegrale und der Satz von Stokes

**Bemerkung:** Die Aufgaben der Serie 10 sind der Fokus der Übungsstunden vom 3./4. Mai.

1. **Flächeninhalt parametrisierter Flächen**

   Drücken Sie in den folgenden Aufgaben den Flächeninhalt der Fläche mithilfe einer Parametrisierung als ein Doppelintegral aus. Sie dürfen die Parametrisierungen aus Serie 9, Aufgaben 4 und 6 verwenden. Berechnen Sie anschliessend das Integral. (Es gibt viele richtige Möglichkeiten, das Integral aufzustellen, sodass Ihre Integrale nicht mit den Integralen in den Lösungen übereinstimmen müssen. Jedoch sollte sich für den Flächeninhalt derselbe Wert ergeben.)

   a) **Geneigte Ebene im Innern eines Zylinders**

   Der Teil der Ebene $y + 2z = 2$ im Innern des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$.

   b) **Kegelstumpf**

   Der Teil des Kegels $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ zwischen den Ebenen $z = 2$ und $z = 6$.

   c) **Kreiszylinderband**

   Der Teil des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ zwischen den Ebenen $z = 1$ und $z = 4$.

   d) **Parabolische Kappe**

   Die von dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ aus dem Paraboloid $z = 2 - x^2 - y^2$ ausgeschnittene Kappe.

   e) **Abgesägte Kugel**

   Der untere Teil der von dem Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ geschnittenen Fläche.

   f) **Torus**

   Die ganze Torusfläche $(\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = a^2$, wobei die Radien $R > a > 0$ gegeben sind.

2. **Oberflächenintegrale von skalaren Funktionen**

   Integrieren Sie jeweils die angegebene Funktion über die angegebene Fläche.

   a) **Teil einer Ebene**

   $G(x, y, z) = z$ über den Teil der Ebene $x + y + z = 4$, der oberhalb des Quadrats $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, in der $xy$-Ebene liegt.

   b) **Parabolischer Zylinder**

   $G(x, y, z) = x$ über den parabolischen Zylinder $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

   c) **Kugel**

   $G(x, y, z) = x^2$ über die Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**d) Teil einer Hyperboloidschale**

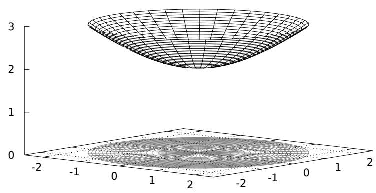
$G(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ über den Teil der Hyperboloidschale

$$z^2 - x^2 - y^2 = 4,\ z \geq 0,$$

welcher über der Kreisscheibe

$$x^2 + y^2 \leq 5$$

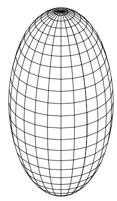
liegt.




**e) Rotationsellipsoid**

$G(x,y,z) = \sqrt{1+3x^2+3y^2}$ über das Ellipsoid

$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4.$$



**3. Oberflächenintegrale von Vektorfeldern**

Berechnen Sie die folgenden Flüsse durch Flächen mittels der Definition.

**a)** Fluss des Radiusvektors

$$\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$$

von innen nach außen[1] durch die Oberfläche der Halbkugel

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

**b)** Fluss des Radiusvektors

$$\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$$

von innen nach außen durch die Oberfläche des Paraboloidsegments

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z \leq 1,\ z \geq 0\}.$$

**c)** Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} \\ 2z^2 \end{pmatrix}$$

durch den Teil des Ellipsoids

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1$$

im ersten Oktanten weg vom Ursprung.

[1] d.h. so, dass die Flächennormale vom Ursprung weg gerichtet ist.

**4. Überprüfung des Satzes von Stokes**

Es sei $\Phi = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA$ der Fluss des Vektorfeldes $\operatorname{rot} \vec{F}$ von innen nach außen durch das halbe Ellipsoid

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + 8z^2 = 1,\ z \geq 0\},$$

wobei

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ xy \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

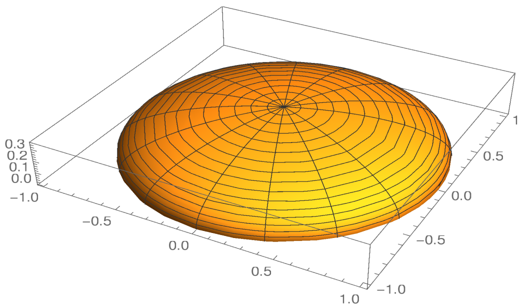



Abbildung 1: halbes Ellipsoid $S$

In den nachstehenden drei Teilaufgaben soll sich der gleiche Wert $\Phi$ ergeben.

**a)** Benutzen Sie den Satz von Stokes, um $\Phi$ durch ein Linienintegral zu berechnen.

**b)** Berechnen Sie $\Phi$ direkt mithilfe einer Parametrisierung von $S$.

**c)** Berechnen Sie $\Phi$, indem Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes zu einer Fläche $\widetilde{S}$ übergehen, die für die Berechnung des Integrals günstiger ist.

**5. Linienintegrale via Satz von Stokes**

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Linienintegral $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$, wobei

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ z^2 - x^2 \\ y^2 - z^2 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R},$$

und $C$ die (von oben betrachtet) positiv orientierte Randkurve des Quadrates

$$Q = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 |\ |x| \leq 1,\ |y| \leq 1\}$$

bezeichnet.

**6. Flüsse via Satz von Stokes**

Berechnen Sie den Fluss $\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA$ des Vektorfeldes $\operatorname{rot} \vec{F}$ von innen nach außen durch die Fläche

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ 3 \leq x \leq 5\}$$

mit Hilfe des Satzes von Stokes, wobei

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y \\ -z \\ x-y-z \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}.$$

**Kurzlösungen:**

**1.** **a)** $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$

**b)** $8\pi\sqrt{5}$

**c)** $6\pi$

**d)** $\frac{\pi}{6}\big(5\sqrt{5}-1\big)$

**e)** $\pi\big(4+2\sqrt{2}\big)$

**f)** $4\pi^2 Ra$

**2.** **a)** $3\sqrt{3}$

**b)** $\frac{1}{4}\big(17\sqrt{17}-1\big)$

**c)** $\frac{4}{3}\pi$

**d)** $2\pi$

**e)** $12\pi$

**3.** **a)** $2\pi$

**b)** $\frac{3}{2}\pi$

**c)** $6\pi$

**4.** **a)** $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t)\cdot\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$

**b)** $\iint_S \big(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\big)\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2\cos(\theta)\sin(\phi) \\ 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{8}}\cos(\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}}\cos(\theta)\sin^2(\phi) \\ \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\theta)\sin^2(\phi) \\ \sin(\phi)\cos(\phi) \end{pmatrix} d\theta\, d\phi = 0$

**c)** $\iint\limits_{\tilde{S}} \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\widetilde{S} = 0$ für $\tilde{S} = \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2\leq 1\}$.

**5.** rot $F(x,y,z) = 2(y-z,0,-x+y)^T$ und $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_Q \big(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\big)\, dA = 2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-x+y)\, dx\, dy = 0$

**6.** $\iint_S \big(\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\big)\, dA = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$