Serie 11: Divergenzsatz und Fourier-Reihen

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 11 sind der Fokus der Übungsstunden vom 10./12. Mai.

1. Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{2} z \sin(y) \\ xz\cos(y) \\ ze^{x^2+y^2} \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

durch die Oberfläche des geraden Kreiszylinders mit Höhe 3 und Grundfläche

$$D = \{(x,y,0) |\ x^2+y^2 \leq 2\}.$$

Orientieren Sie die Oberfläche so, dass die Normale nach außen zeigt.

Hinweis: Führen Sie geeignete Koordinaten ein.

2. Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\,(1-e^z) \\ 0 \\ e^z \end{pmatrix}, \qquad x,y,z \in \mathbb{R},$$

von innen nach außen durch die Hemisphäre

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

mit Hilfe des Satzes von Gauß.

Hinweis: Da S keine geschlossene Fläche ist, ist eine zweite Fläche T sorgfältig zu wählen, sodass die beiden Flächen zusammen ein räumliches Gebiet beranden.

3. Skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen und bestimmen Sie ihre Fourierreihen:

a) 2π-periodische Fortsetzung von

$$f_a(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

b) 2π-periodische Fortsetzung von

$$f_b(x) = x - \pi, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$

c) 2π-periodische Fortsetzung von

$$f_c(x) = x - \pi, \quad -\pi \leq x < \pi.$$

d) 1-periodische Fortsetzung von

$$f_d(x) = \begin{cases} 1, & n \leq x \leq (n+\frac{1}{2}),\ n \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion f_d ist die in der Praxis wichtige Impulsfunktion.

e) T-periodische Fortsetzung von

$$f_e(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x \leq \frac{T}{3} \\ B, & \frac{T}{3} < x < T, \end{cases}$$

wobei A und B reelle Konstanten sind.

4. Stellen Sie die Funktion

$$f(x) := (x - \pi)^2$$

auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ durch ihre Fourierreihe dar. Studieren Sie anschließend die Situation speziell an der Stelle $x = 0$. Welche kuriose Formel ergibt sich?

5. Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L} x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L}(L - x), & \frac{L}{2} < x \leq L. \end{cases}$$

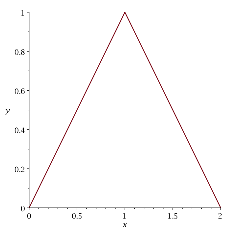


Abbildung 1: Graph von $y = f(x)$ für $L = 2$ und $k = 1$

Bestimmen Sie die Fourierreihe

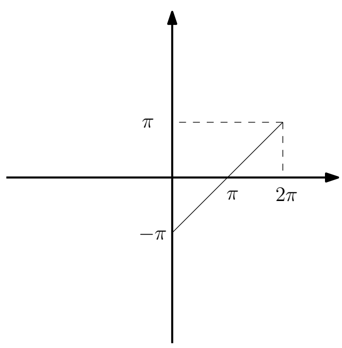
a) der geraden Fortsetzung von $f(x)$,

b) der ungeraden Fortsetzung von $f(x)$.

Vergleichen Sie dazu Aufgabe **3.a)**.

6. Sei

$$g(x) = x - \pi, \quad 0 \leq x < 2\pi.$$



Bestimmen Sie die Fourierreihe

a) der geraden Fortsetzung von $g(x)$,

b) der ungeraden Fortsetzung von $g(x)$.

Vergleichen Sie dazu Aufgabe **3.b)**.

Kurzlösungen:

1. $3\pi\left(e^2-1\right)$.

2. $\frac{5}{3}\pi$.

3. **a)** $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)$.

b) $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx)$.

c) $-\pi-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k}\sin(kx)$.

d) $\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)2\pi x)}{2k-1}$.

e) $a_k=\begin{cases}0, & \text{falls} \quad k=3n\\ \frac{A-B}{k\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{falls} \quad k=3n+1\\ \frac{B-A}{k\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}, & \text{falls} \quad k=3n+2.\end{cases}$;

$a_0=\frac{2}{T}\left(A\cdot\frac{T}{3}+B\cdot\frac{2T}{3}\right)=\frac{2}{3}(A+2B)$;

$b_k=\begin{cases}0, & \text{falls} \quad k=3n\\ \frac{3(A-B)}{2k\pi}, & \text{sonst.}\end{cases}$.

4. $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2}\cos(kx)$.

5. **a)** $\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(4\ell+2)^2}\cdot\cos\left(\frac{(4\ell+2)\pi x}{L}\right)$.

b) $\frac{8k}{\pi^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^2}\cdot\sin\left(\frac{(2\ell+1)\pi x}{L}\right)$.

6. **a)** $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^2}\cos\left((k+\frac{1}{2})x\right)$.

b) $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx)$.