Serie 12: Partielle Differentialgleichungen, I

Bemerkung: Die Aufgaben der Serie 12 sind der Fokus der Übungsstunden vom 17./19. Mai.

1. **a)** Verifizieren Sie, dass die Funktionen

$$u(x,y) = \cos(y)\sinh(x) \text{ und } w(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Lösungen der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

auf $\mathbb{R}^2$ sind.

b) Wir betrachten die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x(x,t) + u_t(x,t) = u^2(x,t) \tag{1}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = h(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion ist.
Zeigen Sie, dass (1) und (2) erfüllt werden von der Funktion

$$u(x,t) = \frac{h(x-t)}{1 - t\,h(x-t)}.$$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,t) = (\sin(x+t) - 1)\,\mathrm{e}^t + 1$$

die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$u_x(x,t) - u_t(x,t) + u(x,t) = 1$$

und die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

2. **a)** Wir betrachten die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Für welche Werte $c > 0$ sind die folgenden Funktionen Lösungen?

(i) $u(x,t) = x^2 + t^2$.

(ii) $w(x,t) = \sin(at)\sin(bx)$.

b) Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Für welche Werte $c > 0$ sind folgende Funktionen Lösungen?

(i) $u(x,t) = e^{-t}\sin(\omega x)$, $\omega > 0$.

(ii) $w(x,t) = e^{-\pi^2 t}\cos(5x)$.

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x,t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,t) - u_x(x,t) + u_{tt}(x,t) = 0$$

von der Form

a) $u(x,t) = v(x) + w(t)$,

b) $u(x,t) = X(x)\,T(t)$.

4. Bestimmen Sie mit Hilfe eines Separationsansatzes die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} x\,u_x(x,t) + u_t(x,t) &= t\,u(x,t), \\ u(x,0) &= x^2. \end{aligned}$$

5. Lösen Sie das folgende Problem für die Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)\,, \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 & t \geq 0\,, \\ u(x,0) = 2\sin^2(2\pi x) & x \in [0,1]\,, \\ u_t(x,0) = 0 & x \in [0,1]\,. \end{cases}$$

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Identität:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2\alpha)\right).$$

6. Das physikalische Verhalten einer gedämpften Saite wird durch die partielle Differentialgleichung

$$u_{tt} + 2\pi c u_t = c^2 u_{xx}$$

beschrieben. Bestimmen Sie $u(x,t)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t$ für die folgenden Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, & \text{für } t > 0 \\ u(1,t) = 0, & \text{für } t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \text{für } 0 < x < 1 \\ u_t(x,0) = 0, & \text{für } 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) $f(x) = \sin(3\pi x)$.

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$

Hinweis: Verwenden Sie die Lösung von Aufgabe **5.b)** der Serie 11 (mit $L = 1$, $k = \frac{L}{2}$).

Kurzlösungen:

1. **a)** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) = \cos(y)\sinh(x) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$,
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y)$.

b) $u_t(x,t) = \frac{-h'(x-t)+(h(x-t))^2}{(1-th(x-t))^2}$,
$u_x(x,t) = \frac{h'(x-t)}{(1-th(x-t))^2}$.

c) $u_x(x,t) = \cos(x+t)\mathrm{e}^t$,
$u_t(x,t) = \cos(x+t)\mathrm{e}^t + \sin(x+t)\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t$.

2. **a)** (i) $c = 1$; (ii) $c = \frac{|a|}{|b|}$.

b) (i) $c = \frac{1}{\omega}$; (ii) $c = \frac{\pi}{5}$.

3. **a)** $u(x,t) = C_1\mathrm{e}^x - \lambda x - \frac{\lambda}{2}t^2 + D_1 t + F$, λ eine reelle Konstante.

b) $\underline{\lambda < -\frac{1}{4}}$:

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\left(\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}x\right) + C_2\sin\left(\sqrt{|\lambda| - \frac{1}{4}}x\right)\right)\left(D_1\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}\right).$$

$\underline{\lambda = -\frac{1}{4}}$

$$u(x,t) = (C_1 x + C_2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}\left(D_1\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}\right).$$

$\underline{-\frac{1}{4} < \lambda < 0}$:

$$u(x,t) = \left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x} + C_2\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x}\right)\left(D_1\mathrm{e}^{\sqrt{|\lambda|}t} + D_2\mathrm{e}^{-\sqrt{|\lambda|}t}\right).$$

$\underline{\lambda = 0}$:

$$u(x,t) = (C_1\mathrm{e}^x + C_2)(D_1 t + D_2).$$

$\underline{\lambda > 0}$:

$$u(x,t) = \left(C_1\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x} + C_2\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+\lambda}\right)x}\right)\left(D_1\sin\left(t\sqrt{\lambda}\right) + D_2\cos\left(t\sqrt{\lambda}\right)\right).$$

4. $u(x,t) = x^2\exp\left(\frac{t^2}{2} - 2t\right)$.

5. $u(x,t) = 1 - \cos(4\pi t)\cos(4\pi x)$.

6. **a)** $u(x,t) = \left(\cos(\sqrt{8}c\pi t) + \frac{1}{\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}c\pi t)\right)e^{-c\pi t}\sin(3\pi x)$.

b) $u(x,t) = \left(\frac{4}{\pi^2} + \frac{4c}{\pi}t\right)e^{-c\pi t}\sin(\pi x)$
$+\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^l}{(2l+1)^2}\right)\left[\frac{4}{\pi^2}\cos\left(2c\pi\sqrt{l(l+1)}t\right) + \frac{2}{\pi^2\sqrt{l(l+1)}}\sin\left(2c\pi\sqrt{l(l+1)}t\right)\right]e^{-c\pi t}\sin((2l+1)\pi x)$