Serie 13: Partielle Differentialgleichungen, II

Bemerkungen:

- Die ersten vier Aufgaben der Serie 13 sind der Fokus der Übungsstunden vom 24./26. Mai; die Aufgaben 5 und 6 werden in der Vorlesung am 24. Mai besprochen.
- Die Vorlesung Mathematik II endet am 26. Mai 2016.
- Die Übungsstunden enden am 26. Mai 2016.
- Die Präsenzstunden laufen bis zum 3. Juni 2016.

1. Der Innenraum mit Temperatur u_0 sei durch eine Wand der Dicke L und Temperaturleitfähigkeit $c^2 > 0$ vom Außenraum mit Temperatur u_L getrennt. Zur Zeit $t = 0$ herrsche in der Wand die Temperaturverteilung $u(x,0) = f(x)$. Wir wollen im Folgenden den Temperaturverlauf $u(x,t)$ finden.

a) Formulieren Sie dieses Problem mathematisch mit allen Anfangs- und Randbedingungen.

b) Bestimmen Sie eine stationäre Lösung dieses Problems, also eine Lösung $u^*(x)$, welche nicht von t abhängt und welche die Randbedingungen erfüllt.

c) Wir wählen den Ansatz $u(x,t) = u^*(x) + v(x,t)$. Setzen Sie diesen ein, um eine partielle Differentialgleichung für $v(x,t)$ mit den zugehörigen Anfangs- und Randbedingungen zu erhalten.

d) Finden Sie $v(x,t)$.

e) Finden Sie $u(x,t)$.

f) Sei nun die Dicke $L = \pi$, die innere Temperator $u_0 = u(0,t) = 1$, die äußere Temperatur $u_L = u(\pi,t) = 1 + \pi$ und die Verteilung der Anfangstemperatur

$$u(x,0) = f(x) = 1 + x + \sin(x) - 3\sin(2x) + 2\sin(3x).$$

Bestimmen Sie den Temperaturverlauf $u(x,t)$.

g) Sei nun wieder die Dicke $L = \pi$, die innere Temperatur $u_0 = u(0,t) = 1$, die äußere Temperatur $u_L = u(\pi,t) = 1 + \pi$, lediglich die Verteilung der Anfangstemperatur sei gegeben durch

$$u(x,0) = f(x) = 1 + (\pi + 1)x - x^2.$$

Bestimmen Sie die konkrete Lösung $u(x,t)$.

2. Die Seiten einer dünnen, quadratischen Platte mit Seitenlänge $a = 24$ seien perfekt isoliert. Weiter sei die Temperatur auf allen Seiten konstant.

Finden Sie die stationäre Temperaturverteilung in der Platte, wenn die Temperaturen auf den Seiten die folgenden sind:

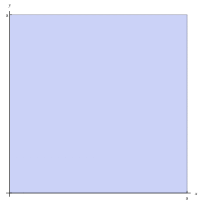

Abbildung 1: Das Quadrat mit Seitenlänge a

a) Obere Seite: $(T_1)°C$,
Untere, linke und rechte Seite: $0°C$.

b) Untere Seite: $(T_0)°C$,
Obere, linke und rechte Seite: $0°C$.

c) Untere Seite $(T_0)°C$,
Obere Seite $(T_1)°C$,
Linke und rechte Seite: $0°C$.
Hinweis: Teilaufgaben a) und b).

3. Wir wollen die Wärmeleitungsgleichung in einem Draht der Länge L unter den folgenden Voraussetzungen lösen: Die Anfangstemperatur sei durch eine Funktion $f(x)$ gegeben und die beiden Enden des Drahtes seien isoliert, sodass keine Wärme in den Draht hinein- oder aus dem Draht herausfliessen kann. Die Temperatur an einem Punkt x zur Zeit t bezeichnen wir dabei mit $u(x,t)$.

a) Erklären Sie, warum dieses physikalische Problem durch die folgenden Gleichungen modelliert wird:

$$\begin{cases} u_t &= c^2 u_{xx}, & \text{für } 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & \text{für } 0 < x < L \\ u_x(0,t) &= 0, & \text{für } t > 0 \\ u_x(L,t) &= 0, & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie $u(x,t)$ in Abhängigkeit von $f(x)$.

4. Lösen Sie das folgende Problem:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) + u_{tt}(x,t) &= 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0, \\ \lim_{t\to\infty} u(x,t) &= 0 & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \\ u(0,t) = u(2\pi,t) &= 0 & \text{für alle } t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

wobei $f(x)$ die 2π-periodische Funktion sei, die

$$f(x) = x \text{ für } -\pi \leq x < \pi$$

erfüllt.
Die folgende Vorgehensweise soll Ihnen helfen:

a) Bestimmen Sie zunächst eine allgemeine Lösung von (1) mittels eines Separationsansatzes. Dabei ergibt sich ein freier reeller Parameter k.

b) Finden Sie anschließend jene Lösungen, die zusätzlich (2) erfüllen. Die Bedingung (2) schränkt den Parameter von vorhin ein.

c) Was muss noch gelten, damit auch die Bedingung (3) erfüllt ist? Die übrig gebliebenen möglichen Produktlösungen sind die sogenannten Basislösungen des homogenen Teils (1) & (2) & (3) dieses Problems.

d) Nach dem Superpositionsprinzip kombinieren Sie die Basislösungen, so dass die Auswertung dieser Linearkombination zur Zeit t=0 die Fourierreihe der Anfangsfunktion (4) ergibt. Dazu benötigen Sie die Fourierreihe von $f(x)$. Die Fourierreihe eines Translats dieser Funktion wurde aber bereits in Aufgabe 3 der Serie 11 berechnet: $f(x) = f_c(x) + \pi$.

5. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} U_0, & \text{für } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{für } |x| > 1, \end{cases}$$

wobei U_0 eine Konstante ist.

a) Stellen Sie die Funktion $f(x)$ mittels eines Fourier-Integrals

$$\int_0^\infty \Big(A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx) \Big)\, dw$$

dar.

b) Ermitteln Sie einen Integralausdruck für die Temperatur $u(x,t)$ in einem unendlich langen Stab mit der Anfangstemperatur

$$u(x,0) = f(x).$$

6. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \pi e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

a) Stellen Sie die Funktion $f(x)$ mittels eines Fourier-Integrals

$$\int_0^\infty \Big(A(w)\cos(wx) + B(w)\sin(wx) \Big)\, dw$$

dar. *Hinweis:* Verwenden Sie partielle Integration, um die Koeffizienten $A(w)$ und $B(w)$ zu bestimmen.

b) Nach einem Satz aus der Vorlesung stimmt das Fourierintegral von f in allen Stetigkeitspunkten von f mit f überein.
Sei $x = -1$. Was ist demnach der Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\cos(w) - w\sin(w)}{1 + w^2}\, dw\ ?$$

c) Nach demselben Satz ist das Fourier-Integral von f in einer Unstetigkeitsstelle von f gleich dem arithmetischen Mittel der beiden einseitigen Grenzwerte von f.
Sei $x = 0$. Was ist das Mittel der einseitigen Grenzwerte von f an der Stelle $x = 0$? Was ist somit der Wert des Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+w^2}\, dw \ ?$$

Überprüfen Sie das Ergebnis mit einer uneigentlichen Integration wie in der Vorlesung Mathematik I.

Kurzlösungen:

1. **a)** u löst das Problem

$$\begin{cases} u_t - c^2 u_{xx} &= 0, & \text{für } 0 < x < L,\ t > 0, \\ u(0,t) &= u_0, & \text{für alle } t \geq 0, \\ u(L,t) &= u_L, & \text{für alle } t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), & \text{für alle } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

b) $u^*(x) = u_0 + \frac{x}{L}(u_L - u_0)$.

c) v löst das Problem

$$\begin{cases} v_t - c^2 v_{xx} &= 0, & \text{für } 0 < x < L,\ t > 0, \\ v(0,t) &= 0, & \text{für alle } t \geq 0, \\ v(L,t) &= 0, & \text{für alle } t \geq 0, \\ v(x,0) &= f(x) - u^*(x), & \text{für alle } 0 \leq x \leq L. \end{cases}$$

d) Es gilt $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, mit $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left(f(x) - u^*(x)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$.

e) Es gilt $u(x,t) = u_0 + \frac{x}{L}(u_L - u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ mit den gleichen A_n wie oben.

f) $u(x,t) = 1 + x + \sin(x)e^{-c^2t} - 3\sin(2x)e^{-4c^2t} + 2\sin(3x)e^{-9c^2t}$.

g) $u(x,t) = 1 + x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \mathrm{e}^{-(2k+1)^2c^2t} \sin\left((2k+1)x\right)$.

2. **a)** $U_1(x,y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4T_1}{n\pi\sinh(n\pi)} \sin\left(\frac{n\pi x}{24}\right)\sinh\left(\frac{n\pi y}{24}\right)$ oder äquivalent

$U_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4T_1}{(2k+1)\pi\sinh((2k+1)\pi)} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{24}\right)\sinh\left(\frac{(2k+1)\pi y}{24}\right)$.

b) $U_0(x,y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4T_0}{n\pi(1-e^{2n\pi})} \sin\left(\frac{n\pi x}{24}\right)\left(e^{\frac{n\pi y}{24}} - e^{\frac{n\pi(48-y)}{24}}\right)$ bzw.

$U_0(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4T_0}{(2k+1)\pi(1-e^{2(2k+1)\pi})} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{24}\right)\left(e^{\frac{(2k+1)\pi y}{24}} - e^{\frac{(2k+1)\pi(48-y)}{24}}\right)$.

c) $U(x,y) = U_0(x,y) + U_1(x,y)$.

3. $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)e^{-\frac{n^2\pi^2c^2}{t}}$ mit $A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx$ und $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ für $n \geq 1$.

4. **a)**
- für $k > 0: u(x,t) = \left(Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}\right)\left(C\cos(\sqrt{k}t) + D\sin(\sqrt{k}t)\right)$
- für $k = 0: u(x,t) = (Ax + B)(Ct + D)$
- für $k < 0: u(x,t) = \left(A\cos(\sqrt{-k}x) + B\sin(\sqrt{-k}x)\right)\left(Ce^{\sqrt{-k}t} + De^{-\sqrt{-k}t}\right)$.

b) $u(x,t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(C\cos(\mu x) + D\sin(\mu x)\right)$ mit einer Konstanten $\mu > 0$.

c) $\mu = \frac{l}{2}$ für ein $l \in \mathbb{N}$.

d) $u(x,t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2}{l}(-1)^{l+1}\sin(lx)e^{-lt}$.

5. **a)** Darstellung von $f(x)$ als Fourierintegral: $\int_0^{\infty} \frac{2U_0\sin(w)}{\pi w}\cos(wx)\,dw$.

b) $u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{2U_0\sin(w)}{\pi w} e^{-c^2w^2t}\cos(wx)\,dw$.

6. **a)** Darstellung von $f(x)$ als Fourierintegral: $\int_0^{\infty} \frac{\cos(wx) + w\sin(wx)}{1+w^2}\,dw$.

b) $\int_0^{\infty} \frac{\cos(w) - w\sin(w)}{1+w^2}\,dw = 0$.

c) Mit Fourierintegralen: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+w^2}\,dw = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{\pi}{2}$.
Klassisch: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+w^2}\,dw = \lim_{R\to\infty}\left[\arctan(x)\right]_{x=0}^{x=R} = \frac{\pi}{2}$.