Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Name:	Departement:
Vorname:	Legi-Nr.:

	1K	2K	Punkte	Bemerkungen:
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
Total				

ETH Zürich
Dr. P. Thurnheer

Frühjahr 2013

BASISPRÜFUNG MATHEMATIK I UND II

für die Studiengänge Agrar-, Erd-, Lebensmittel- und Umweltnaturwissenschaften

---

Wichtig:

- Legen Sie Ihre ETH-Karte offen auf den Tisch.
- Füllen Sie den Kopf des Deckblattes aus.
- Notieren Sie alle Zwischenresultate und Lösungswege.
- Schreiben Sie auf alle zusätzlich abgegebenen Blätter Ihren Namen.
- Hinter jeder (Teil-)Aufgabe steht die maximal erreichbare Punktzahl.

Zugelassene Hilfsmittel:

- Schriftliche Unterlagen
- **kein** Taschenrechner
- **kein** Mobiltelefon

Viel Erfolg!

1. Bestimmen Sie

a) die beiden reellen Zahlen x, für die gilt

$$(\ln x)^2 + \ln\left(x^{\frac{3}{2}}\right) + \ln\left(\ln\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right) + \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0.$$

2 Punkte

b) Betrag und Argument der beiden komplexen Zahlen z, für die gilt

$$\left|\frac{ze^{\frac{i\pi}{6}}}{1+i}\right| = \left|\frac{z^2}{\sqrt{2}-4i}\right| \qquad \text{und}$$

$$\arg\left(z^2\right) = \arg\left(\frac{2i}{\sqrt{3}+i}\right).$$

3 Punkte

2. Bestimmen Sie

a) das Taylorpolynom 3. Grades um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}}$$

2 Punkte

b) und damit den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{2x}\right)$.

2 Punkte

3. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{t}\, x(t) + \ln t, \qquad x(1) = 2.$$

5 Punkte

4. Bestimmen Sie eine (differenzierbare) Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- An jeder Stelle des Definitionsbereichs ist die Steigung des Graphen von f proportional zum Kehrwert der Wurzel aus dem Funktionswert an dieser Stelle.
- Der Graph von f enthält die die Punkte $(0, 1)$ und $(1, 4)$.

4 Punkte

5. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und den Vektor} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ \beta \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie die Parameter α und β so, dass das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ unendlich viele Lösungen besitzt und geben Sie die allgemeine Form derselben an.

4 Punkte

6. Bestimmen Sie die Parameter α und β so, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{den Eigenvektor} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

besitzt und bestimmen Sie dann zwei weitere Eigenvektoren $\underline{c}$ und $\underline{d}$ von A so, dass die drei Vektoren $\underline{b}, \underline{c}$ und $\underline{d}$ linear unabhängig sind.

4 Punkte

7. Das Differentialgleichungssystem

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} u & 2 \\ 2 & v \end{pmatrix} \underline{x}(t)$$

besitzt die (partikuläre) Lösung $\underline{x}^*(t) = e^{\frac{3t}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie u und v sowie die allgemeine Lösung des Systems.

5 Punkte

8. Wir betrachten die durch eine Koordinatengleichung gegebene Fläche

$$\mathcal{F}_1 : f(x,y,z) = x^2 + y - 2z = 0, \qquad x,y,z \in \mathbb{R}^3,$$

sowie die durch eine Parameterdarstellung gegebene Fläche

$$\mathcal{F}_2 : \mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto g(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v^2 \\ uv \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Schnittkurve γ von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$.

2 Punkte

b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte der beiden Flächen $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$, die in der Ebene $z = 4$ liegen und beschreiben Sie die Tangentialebenen an $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ in **einem** dieser Punkte durch Koordinatengleichungen.

3 Punkte

9. Wir betrachten die Fläche

$$\mathcal{F} : x^2 - y - z = 0, \qquad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie

a) die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y),$$

deren Graph $\mathcal{F}$ ist und beschreiben Sie deren Niveaulinien.

2 Punkte

b) die Richtungsableitung von f im Punkt $(2, 3)$ in Richtung $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1 Punkt

c) den kleinsten und den grössten Wert, den f auf der Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \,\}$$

annimmt.

3 Punkte

10. Es sei γ die Schnittellipse des Zylinders

$$\{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1 \,\} \qquad \text{und der Ebene} \qquad z = 2y.$$

a) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 \\ -xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Weges γ (wählen Sie selbst eine Orientierung).

3 Punkte

b) Bestimmen Sie eine Funktion

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto g(x, y, z),$$

so, dass die Arbeit des Vektorfeldes

$$G(x, y, z) = \begin{pmatrix} g(x, y, z) \\ \sin\left(x^2\right) xze^{xyz} \\ \sin\left(x^2\right) xye^{xyz} \end{pmatrix}$$

längs des einmal durchlaufenen Weges γ gleich 0 ist.

Begründen Sie Ihre Antwort!

2 Punkte

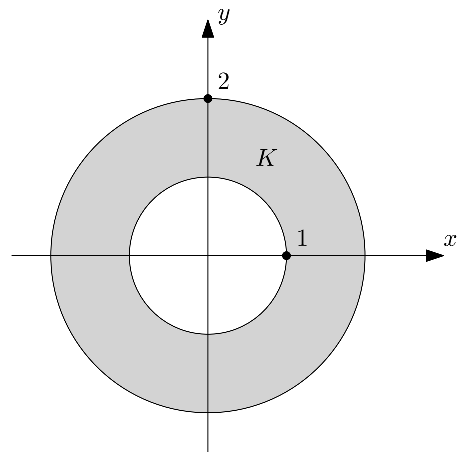
11. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_K f(x,y)\,dx\,dy$$

der Funktion

$$f(x,y) = 3 - x^2 - y^2$$

über den Kreisring K in der Ebene mit Zentrum im Ursprung, Innenradius 1 und Aussenradius 2 (s. Figur).



3 Punkte