D-MATH | Multilineare Algebra | FS 2016

Prof. Dr. Özlem Imamoglu

Serie 1

1. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Sei ψ eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ mit Matrixdarstellung

$$\psi_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

bezüglich $\mathcal{B}$. Bestimme die Matrixdarstellung von ψ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

2. Gegeben seien die zwei Basen

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{B}} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_1} \times \vec{v_2}) \subset \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimme die Matrixdarstellung von $\psi(x, y) = (y, x)$ bezüglich $\mathcal{B}$

b) Bestimme die Matrixdarstellung von $\psi(\vec{x}) = \vec{v_2} \times \vec{x}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{B}}$.

3. Gegeben seien die zwei Basen von $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{B}} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

a) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $(-24, 8, 19)^T$ bezüglich der Standardbasis. Berechne den Koordinatenvektor $[v]_{\mathcal{B}}$ beziehungsweise $[v]_{\tilde{\mathcal{B}}}$ von v bezüglich $\mathcal{B}$ beziehungsweise $\tilde{\mathcal{B}}$.

b) Sei $w \in \mathbb{R}^3$ mit $[w]_{\tilde{\mathcal{B}}} = (1, 2, 3)^T$. Bestimme die Koordinaten von w bezüglich $\mathcal{B}$.

4. Betrachte die Differentialgleichung

$$f''(x) + f(x) = 0$$

und sei V der Vektorraum aller komplexwertiger Lösungen.

a) Zeige, dass V ein Vektorraum ist.

b) Finde eine Basis von V.

c) Gib eine Basis für den Unterraum $W \subset V$ bestehend aus allen reellwertigen Lösungen.

d) Die Funktion $g(x) = e^{-ix} + \sin x$ ist ein Element von V. Gib die Koordinatenvektoren von g bezüglich deiner Basis aus Teilausgabe b) an.